

Astrofysiikan peruskurssi I – harjoitus 5 kevät 2024
Ratkaisut on palautettava ma 19.2. klo 12.00 mennessä Moodleen.

1. Osoita että kolmiulotteisessa Maxwellin nopeusjakaumassa vauhdin keskiarvo on $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m}$, ja että todennäköisin vauhti on $v_p = \sqrt{2kT/m}$. Totea myös, että $v_p < \langle v \rangle < v_{\text{rms}}$, missä $v_{\text{rms}} = \sqrt{3kT/m}$ on luennolla johdettu nopeushajonta.
2. Tähtienvälisessä pilvessä havaitaan OH-molekyylin 1667 MHz:n viivan puoliarvonleveydeksi (FWHP) 3.6 kHz. Laske pilven lämpötilan yläraja.

Huom. Spektriviivan levenemiseen vaikuttavat molekyylien lämpöliikkeen (Maxwellin jakautuma) ohella myös pilvessä esiintyvät turbulenttiset ja systemaattiset liikkeet (kuten ekspansio, kontraktio, rotaatio). Viivan puoliarvonleveys (FWHP, full width at half power) tarkoittaa viivan leveyttä kohdassa, jossa intensiteetti on puolet viivan huipun intensiteetistä. Viivan muoto oletetaan gaussiseksi, siis Maxwellin 1-dimensio-naalisen nopeusjakautuman mukaiseksi.

3. Osoita, että tähden atmosfäärin tiheysjakautuma $\rho(x)$ saadaan kaavasta

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-mgx/kT},$$

missä m on molekyylin massa, x korkeus perustasosta, $\rho(0) = \rho_0$ ja g on gravitaatiokiihtyvyyden. Lämpötila T oletetaan tässä vakioksi.

Laske lisäksi g ja skaalakorkeus δx (matka jolla tiheys pienentyy kertoimella e) seuraavissa tapauksissa:

- Aurinko: $M = M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg, säde $R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^8$ m, $T_{\text{eff}} = 5785$ K.
- Valkoinen kääpiö: $M = 0.4M_{\odot}$, $R = 0.015R_{\odot}$, $T_{\text{eff}} = 15\,200$ K.
- M5 ylijättiläinen: $M = 20M_{\odot}$, $R = 230R_{\odot}$, $T_{\text{eff}} = 3100$ K.

4. Osoita että adiabaattisessa tasapainossa ($P = C\rho^{\gamma}$) olevassa atmosfäärissä lämpötilagradientti on vakio:

$$\left| \frac{dT}{dx} \right| = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R},$$

missä R on kaasuvakio ja μ moolimassa.

5. Auringon koronassa atomien viritystilat johtuvat pääasiassa atomien keskinäisistä törmäyksistä. Koronan spektrissä Ca XIII viivat, eli 12 kertaa ionisoituneen kalsiumin viivat, ovat huomattavasti voimakkaammat kuin Ca XV:n (14 kertaa ionisoitunut kalsium). Ca XIII:n ionisaatiopotentiaali on 714 eV ja Ca XV:n 862 eV. Arvioi näiden tietojen perusteella koronan lämpötila.