Astrofysiikan peruskurssi I – harjoitus 4 kevät 2024

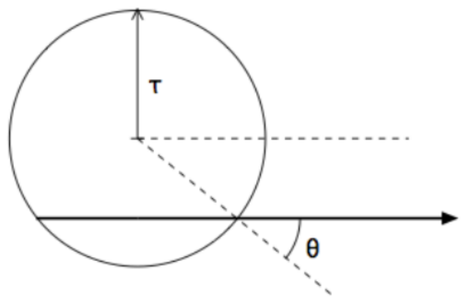
Ratkaisut on palautettava ma 12.2. klo 12.00 mennessä Moodleen.

1. Palataan viime viikon harjoituksen homogeeniseen pallomaiseen kaasupilveen ja oletetaan nyt, että optinen paksuus keskuksesta pintaan on τ_ν. Osoita, että kuvan esittämään suuntaan ulos tuleva monokromaattinen intensiteetti on

$$I_\nu(\theta) = S_\nu[1 - \exp(-2\tau_\nu \cos\theta)],$$

missä S_ν on (vakio) lähdefunktio. Osoita myös että vuontiheys pilven pinnalla on

$$\mathcal{F}_\nu = \pi S_\nu \left[1 - \frac{1 - \exp(-2\tau_\nu)(1 + 2\tau_\nu)}{2\tau_\nu^2}\right].$$



2. Osoita että säteilypaine

$$P_{R\nu} = \frac{1}{c} \oint I_\nu \cos^2\theta \,\mathrm{d}\omega$$

tasopinnan rajoittamassa äärettömyyteen ulottuvassa atmosfäärissä voidaan laskea kaavasta

$$P_{R\nu} = \frac{2\pi}{c} \int_0^\infty S_\nu(\tau'_\nu) E_3(|\tau'_\nu - \tau_\nu|) \,\mathrm{d}\tau'_\nu\,,$$

missä τ_ν on optinen paksuus pinnalta alaspäin mitattuna, S_ν on lähdefunktio ja

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{y^n} \,\mathrm{d}y\,.$$

Huom: $E_n(x)$ on määritelty vain kun $x \geq 0$. Luentomonisteessa on joitain merkkivirheitä tähän tehtävään liittyvissä kaavoissa.

3. Oletetaan nyt, että edellisen tehtävän atmosfääriin osuu yläpuolelta säteilyä, jonka intensiteetti on $I_\nu(0, \mu) = I_0$, $\mu = \cos\theta < 0$. Osoita, että edellisessä tehtävässä johdettuun säteilypaineen lausekkeeseen pitää nyt lisätä termi:

$$P_{R\nu}(\tau_\nu) = \frac{2\pi}{c} E_4(\tau_\nu) I_0.$$

4. Osoita, että kun yksi lisätermi otetaan mukaan Eddingtonin–Barbier'n approksimaatiossa vuontiheydelle, niin tulos on:

$$\pi^{-1}\mathcal{F} \approx S(\tau = 2/3) + \frac{5}{18} \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}\tau^2}\bigg|_{\tau=2/3}.$$

5. (a) Oletetaan harmaa atmosfääri. Osoita, että jos Eddingtonin approksimaatio on voimassa niin keskimääräiselle intensiteetille pätee:

$$\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}^2 J}{\mathrm{d}\tau^2} = J - S.$$

(b) Eddingtonin approksimaatio pätee myös joissain tilanteissa joissa säteilykenttä ei ole isotrooppinen. Oletetaan, että säteilyn intensiteetti on muotoa

$$I(\tau, \mu) = \begin{cases} I_+(\tau)\delta(\mu - \mu_0), \mu > 0 \\ I_-(\tau)\delta(\mu + \mu_0), \mu < 0, \end{cases}$$

missä $\delta(x)$ on Diracin deltafunktio. Osoita, että Eddingtonin approksimaatio on voimassa kun valitaan $\mu_0 = 1/\sqrt{3}$, ja että tällöin

$$I_+ = J + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\tau}$$
$$I_- = J - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\tau}.$$