

Astrofysiikan peruskurssi I – harjoitus 1 kevät 2024
Ratkaisut on palautettava ma 22.1. klo 12.00 mennessä Moodleen.

1. Säteilyn intensiteetin (pintakirkkauden) yksikkönä käytetään tähtitieteessä esim. seuraavia yksiköitä: MJy sterad⁻¹ (radio- ja IR-astronomiassa, Jy(jansky) = 10⁻²⁶ W m⁻² Hz⁻¹) sekä W m⁻² μm⁻¹ sterad⁻¹ (lähi-infrapuna-alueella).
 - (a) Johda muunnoskaava intensiteettien I_λ ja I_ν välille.
 - (b) Mikä on I_ν :n arvo yksiköissä MJy sterad⁻¹ kun $I_\lambda = 1$ W m⁻² μm⁻¹ sterad⁻¹ aallonpituuksilla (i) $\lambda = 1$ μm ja (ii) $\lambda = 100$ μm?
2. Kokonaissäteilyteho voidaan tulkita geometrisesti käyrän $I_\nu(\nu)$ ja ν -akselin välisenä pinta-alana. Usein on kuitenkin tarkoituksenmukaista esittää säteilylähteen spektrin energiajakautuma siten, että piirretään suure νI_ν (SED = Spectral Energy Distribution) taajuuden ν logaritmin funktiona. Osoita, että lähteen kokonaissäteilyteho taajuusvälissä (ν_1, ν_2) on käyrän alapuolelle jäävä pinta-ala myös $(\ln \nu, \nu I_\nu)$ -kuvaajassa.
3. Linssillä, jonka läpimitta on 10 cm ja polttoväli 100 cm, muodostetaan kuva Aurinosta. Auringon kulmaläpimitta on $\theta = 32'$ ja linssin läpäisykertoimeksi oletetaan 1.
 - (a) Osoita että säteilyn intensiteetti ei muutu valon kulkiessa linssin läpi.
 - (b) Kuinka paljon kirkkaampi kuva on polttopisteessä kuin Auringon suoraan valaisema pinta? Kuvan kirkkaudella tarkoitetaan tässä säteilyvuontiheyttä kuvaspinnalla.
4. Wienin siirtymälait:
 - (a) Johda Wienin siirtymälaki

$$\lambda_{\max} T \approx 0.2898 \text{ cm K}$$

mustan kappaleen säteilyintensiteetin $B_\lambda(T)$ maksimin aallonpituuden λ_{\max} ja lämpötilan T yhteydelle.

- (b) Johda vastaava relaatio

$$\nu_{\max} T^{-1} \approx 5.879 \times 10^{10} \text{ Hz K}^{-1}$$

intensiteetin $B_\nu(T)$ maksimitaajuudelle ν_{\max} ja selitä miksi $\nu_{\max} \neq c/\lambda_{\max}$.

Vihje: tehtävässä esiintyviä yhtälöitä voi joutua ratkaisemaan numeerisesti.

5. Stefanin–Boltzmannin lain mukaan mustan kappaleen säteilyteho pinta-alaa kohti (kokonaisvuontiheys) on

$$F = \sigma T^4$$

Johda tämä tulos lähtien Planckin laista. Anna johtosi perusteella lauseke Stefanin–Boltzmannin vakiolle muiden luonnonvakioiden funktiona. Mikä on vakion numeerinen arvo?

Tehtävässä esiintyy hankala integraali jonka arvon voi katsoa myös taulukoista (ks. Riemannin ζ -funktio).