TEOREETTISEN ASTROFYSIIKAN PERUSKURSSI

SISÄLLYS

ESIPUHE

Tämä moniste perustuu Helsingin yliopiston tähtitieteen aineopintoihin kuuluvan teoreettisen astrofysiikan peruskurssin luentoihin. Monistetta toimittaessani olen pääasiassa tukeutunut prof. Kalevi Mattilan luentoihin vuodelta 1981. Paikoitellen olen tehnyt myös omia lisäyksiä. Kuvia, taulukoita ja tiedon jyväsiä olen lainannut myös seuraavista lähteistä :

M. Harwitt : Astrophysical Concepts, John Wiley. New York 1973.
E. Novotny : Introduction to Stellar Atmospheres and Interiors. Oxford University Press 1973.
L.H. Aller : Astrophysics. The Atmospheres of the Sun and Stars. Second Edition. Ronald Press, New York 1963.
D. Mihalas : Stellar Atmospheres. Second Edition. W.H. Freeman and Company, San Francisco 1978.
J. Andouze & S. Vauclair : An Introduction to Nuclear Astrophysics. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1980.
C. Pethick : Neutron Stars (NORDITA:n kesäkurssi v. 1982).
H. Voigt : Abriss der Astronomie. 3. Auflage. Bibliographisches Institut, Mannheim 1980.
K. Kurki-Suonio : Fysiikan cum laude luennot

Monisteen puhtaaksikirjoitus on tehty talkoovoimin mahdollisimman nopeasti. Konekirjoittajille Jukka Piiroselle, Matti Koivistolle ja Merja Karsmalle lausunkin parhaat kiitokseni.

Joulukuussa 1984

Tarja Liljeström

TEOREETTISEN ASTROFYSIIKAN PERUSKURSSI

JOHDANTO:

TEOREETTISEN ASTROFYSIIKAN PAIKKA TÄHTITIETEESSÄ

Tähtitiede voidaan karkeasti jakaa kahteen osa-alueeseen: astrofysiikkaan sekä klassiseen tähtitieteeseen, joka käsittää lähinnä positioastronomian ja taivaanmekaniikan. Astrofysiikka tutkii nimensä mukaisesti taivaankappaleita fysiikan menetelmin. Pääasiallisesti analysoidaan taivaankappaleiden lähettämää sähkömagneettista säteilyä. Tämän lisäksi havaitaan myös avaruudesta saapuvaa kosmista säteilyä (e^-, α, ...), neutriinosäteilyä sekä toistaiseksi vielä hypoteettista gravitaatiosäteilyä. Tähtitieteen nykyisestä tutkimustyöstä varsin huomattava osa (noin 80 %) kuuluu astrofysiikan piiriin.

Teoreettinen astrofysiikka pyrkii yleisiin fysiikan teorioihin nojautuen selittämään taivaankappaleista saatuja havaintoja. Tätä varten on tunnettava

1) säteilyn ominaisuudet, sen syntymekanismit taivaankappaleissa, sen eteneminen ja absorptio sekä
2) taivaankappaleiden fysikaaliset ominaisuudet kuten dynaamiset tekijät, rakenne ja kehitys.

Jotta havainnot voitaisiin tyydyttävästi selittää, laaditaan kohteesta teoreettinen malli, joka on aina yksinkertaistettu kuva todellisesta taivaankappaleesta (esim. tähtimallit, atmosfäärimallit, tähtienvälisten pilvien mallit, galaksien massamallit). Vertaamalla mallia havaintoihin voidaan mallia täsmentää. Toisinaan vertailu myös osoittaa, että kohteesta ei vielä voida laatia luotettavaa, yksityiskohtaisempaa mallia puutteellisten havaintojen vuoksi tai koska ilmiöön vaikuttavia tekijöitä ei vielä riittävästi tunneta.

Astrofysiikka on sovellettua fysiikkaa siinä mielessä, että laboratoriokokeisiin perustuvia fysiikan lakeja sovelletaan sellaisinaan taivaankappaleisiin. Voidaan tietysti kysyä, onko tämä oikeutettua, kun tarkastellaan ajallisesti ja paikallisesti hyvinkin kaukaisia kohteita. Kokemus on osoittanut, että näin menetellen on havainnot voitu selittää. Koska astrofysiikan kehitys on jo noin 100 vuoden ajan ollut hyvin menestyksekästä, ei ole mitään syytä luopua oletuksesta, että "taivaallista" fysiikkaa ja maanpäällistä fysiikkaa hallitsevat samat luonnonlait. Tuon tuostakin esiintyy tosin spekulointia siitä, että tähtitieteelliset havainnot voisivat johtaa "uuteen fysiikkaan". Tähän on viitattu mm. galaksien punasiirtymäilmiön, kvasaarien energiantuoton sekä pulsarien säteilymekanismin yhteydessä. Lähinnä voitaisiin "uutta fysiikkaa" ajatella löytyvän erittäin voimakkaista gravitaatiokentistä, joita esiintyy neutronitähtien ja toistaiseksi hypoteettisten mustien aukkojen yhteydessä.

Tähtitieteen piirissä luotiin viimeksi uutta fysiikkaa Kopernikuksen, Keplerin ja Galilein toimesta, joitten havaintoihin nojautuen Newton rakensi kokonaan uuden mekaniikan järjestelmän. Planeettojen liikelakien selvittämisen myötä muotoutuivat massojen yleisen vetovoiman käsite sekä dynamiikan periaatteet. Mekaniikka hallitsi sitten fysiikkaa ja taivaanmekaniikka tähtitiedettä aina 1800-luvun puoliväliin saakka. On jotenkin paradoksaalista, että juuri taivaanmekaniikkaa ei katsota astrofysiikkaan kuuluvaksi, vaikka taivaanmekaniikka tavallaan loi pohjan koko nykyiselle fysiikalle! Tällä on lähinnä historiallinen selityksensä: taivaanmekaniikan havainnot perustuvat taivaankappaleiden koordinaattimittauksiin, astrofysiikka sen sijaan käyttää "uudenaikaisempia", etupäässä säteilyä kuvaavia havaintosuureita.

Muutamia vuosilukuja astrofysiikan kehityksestä

1814	Fraunhofer keksi Auringon absorptioviivat
1823	Fraunhofer keksi tähtien absorptioviivat
1859	Kirchhoff ja Bunsen selittivät Fraunhoferin viivojen synnyn
1860	Kirchhoff muotoili säteilyreorian perusteet (Kirchhoffin lause)
1885-	Pickering, Cannon et al. laativat tähtien spektriluokittelun (Henry Draper Catalogue)
1900	Planckin säteilylaki
1906	Karl Schwarzschild kehitti stationääristen säteilykenttien teorian, joka muodostaa tähtien teorian peruspilarin: energiankuljetus tapahtuu säteilyn avulla
1908	Hale keksi auringonpilkkujen magneettiset kentät
1913	Hertzsprung-Russel diagramma
1916-20	Eddington loi tähtien sisäisen rakenteen teorian
1920	Saha esitti termisen ionisaation ja virittymisen teorian, joka on tähtien spektrien fysikaalisen tulkinnan perusta.
1927	Zanstra kehitti planetaaristen sumujen säteilyteorian: UV säteily ($\lambda < 912$ Å) ionisoi atomit
1930	Unsöld esitti konvektiivisen virtauksen tähtien atmosfääreissä
1938	Bethe ja Weizsäcker esittivät, että ydinreaktiot ovat tähtien energian lähde
1938	Strömgren esitti HII alueiden teorian
1950	Alfven, Herlofson, Kiepenheuer, Shklovski esittivät, että synkrotronisäteily on useiden radiolähteiden säteilyn mekanismi

1. TAIVAANKAPPALEIDEN DYMAMIIKASTA JA MASSOISTA

Kahden kappaleen probleemaan liittyvä teoria on kertauksenomaisesti esitetty liitteessä. Taivaanmekaniikan luennoilla käsitellään kahden kappaleen probleeman sovellutuksia aurinkokunnan piirissä. Tässä luvussa tarkastellaan lähinnä tähtien ja tähtijärjestelmien dynamiikkaa.

1.1 TÄHTIENVÄLISEN PILVEN KONTRAKTIO

Esimerkkinä yhden kappaleen probleemasta tarkastellaan oman gravitaatiovoimansa vaikutuksesta kokoon luhistuvaa pallomaista, homogeenista tähtienvälistä pilveä, jonka tiheys alkuhetkellä t=0 on $\rho(0)$. Olkoon alkuhetkellä pilven mielivaltaisen pallonkuoren säde r(0)=a ja tämän kuoren sisäpuolelle jäävä massa M(a). Oletetaan lisäksi, että luhistumisen edistyessä turbulenttiset liikkeet eivät sekoita sisäkkäisten pallokuorien järjestystä, jolloin kuoren sisäpuolelle jäävä massa pysyy vakiona koko luhistumisen aikana. Koska pallomaisen massajakautuman M(a) gravitaatiovaikutus sen pinnalla tai ulkopuolella olevaan hiukkaseen on tunnetusti sama kuin pallon keskipisteeseen sijoitetulla M(a)-massaisella pisteellä, on a-säteisellä pallonkuorella olevan massahiukkasen liikeyhtälö alkuhetkellä:

$$\ddot{r} = -\frac{G\,M(a)}{r^2}$$

$$\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = -G\,M(a)\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$\int_0^v v\,dv = -G\,M(a)\int_0^r \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$\frac{v^2}{2} = G\,M(a)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{v^2}{2} = G \cdot \frac{4\pi}{3} \varrho(0) a^3 \cdot \frac{1}{a}\left(\frac{a}{r} - 1\right) \quad \Big| \cdot \frac{2}{a^2}$$

$$\frac{v^2}{a^2} = \frac{8\pi G \varrho(0)}{3} \left(\frac{a}{r} - 1\right)$$

$$\frac{v}{a} = \overset{(+)}{-} \sqrt{\frac{8\pi G \varrho(0)}{3}\left(\frac{a}{r} - 1\right)}$$

Huom. $\bar{v} \uparrow\downarrow \bar{r}(0) = \bar{a}$

Sij. $\frac{r}{a} = \cos^2\beta \Rightarrow r = a\cos^2\beta$

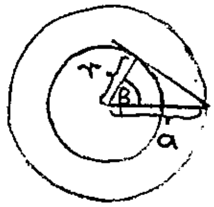
$\Rightarrow v = \frac{dr}{dt} = a \cdot 2\cos\beta(-\sin\beta)\frac{d\beta}{dt}$

$$-2\sin\beta\cos\beta\frac{d\beta}{dt} = -\sqrt{\frac{8\pi G \cdot \varrho(0)}{3}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\beta} - 1}$$

$$2\sin\beta\cos\beta \, d\beta = dt\sqrt{\frac{8\pi G \varrho(0)}{3}} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}} \quad \Big| \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \quad \Big| \int$$

$$2\int_0^{\pi/2} \cos^2\beta \, d\beta = \int_0^{t_f} dt \sqrt{\frac{8\pi G \varrho(0)}{3}}$$

$r \to 0 \Rightarrow \beta \to \frac{\pi}{2}$



$$2 \Big/_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(\beta + \sin\beta\cos\beta) = t_f \sqrt{\frac{8\pi G \varrho(0)}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_f = \sqrt{\frac{3\pi}{32 G \varrho(0)}}}$$

PILVEN LUHISTUMISAIKA

Luhistuvan pilven "vapaan putoamisajan" lausekkeen voit lyhyemmin johtaa Keplerin III lain avulla, kunhan ensin selität itsellesi, millaista "ellipsirataa" jokainen pallonkuoren piste liikkuu (harjoitustehtävä).

Oletetaan esimerkiksi, että pilvi koostuu yksinomaan vetymolekyyleistä. Tällöin pilven tiheys on

$\rho_{H_2} = n_{H_2} \times m_{H_2}$, missä n_{H_2} = vetymolekyylien lukumäärä/cm^3

sijoittamalla $\quad m_{H_2} = 2 \times 1.67 \times 10^{-27}$ kg

$G = 6.67\ 10^{-11}\ \frac{kgm}{s^2}\ m^2\ kg^{-2}$

$1\ y = 3.156 \times 10^7 s$

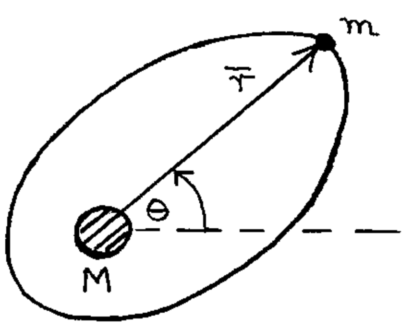
$n_{H_2} = 3000\ cm^{-3}$ (tyypillinen arvo luhistuvassa molekyylipilvessä)

saadaan pilven luhistumisajaksi noin 10^5 vuotta.

1.2 KAKSOISTÄHTIEN RADAT JA TÄHTIEN MASSANMÄÄRÄYS

1.2.1 Kaksoistähtien liikeradat

a) Kun m << M :

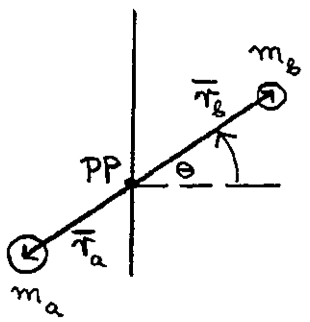


Probleema palautuu yhden kappaleen probleemaksi, jossa suurempimassainen komponentti (massa M) on inertiaalikoordinaatiston origona.

Pienempimassaisen komponentin liikeyhtälö:

$$\boxed{\ddot{\bar{r}} = -\frac{GM}{r^3}\bar{r}}$$

b) Kun $m_a \approx m_b$:



Ratkaistava kahden kappaleen probleema, jossa inertiaalikoordinaatiston origona on systeemin painopiste.

Komponenttien a ja b liikeyhtälöt :

$$m_a \ddot{\bar{r}}_a = -\frac{G m_a m_b}{r^3}\,\bar{r}$$

Komponenttien välinen etäisyysvektori on

$$\bar{r} = \bar{r}_a - \bar{r}_b$$

Massapisteen määritelmästä

$$m_a \bar{r}_a = -m_b \bar{r}_b$$

$$\Rightarrow \bar{r}_b = -\frac{m_a}{m_b}\bar{r}_a$$

joten

$$\bar{r} = \left(1 + \frac{m_a}{m_b}\right)\bar{r}_a$$

$$\ddot{\bar{r}}_a = -\frac{G \cancel{m_b}}{\left(1+\frac{m_a}{m_b}\right)^3 r_a^3}\cdot\frac{m_a+m_b}{\cancel{m_b}}\,\bar{r}_a$$

$$\ddot{\bar{r}}_a = -\frac{G M}{\left(1+\frac{m_a}{m_b}\right)^3}\,\frac{\bar{r}_a}{r_a^3} = -\frac{G M}{\left(\frac{M}{m_b}\right)^3}\,\frac{\bar{r}_a}{r_a^3}$$

$$\boxed{\ddot{\bar{r}}_a = -\frac{G}{M^2}\, m_b^3\, \frac{\bar{r}_a}{r_a^3}}$$

missä $M = m_a + m_b$

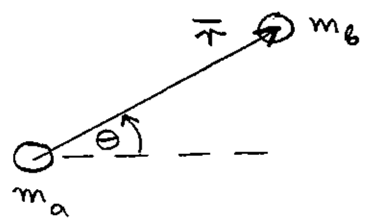
Vastaavasti saadaan toiselle komponentille :

$$\boxed{\ddot{\bar{r}}_b = -\frac{G}{M^2}\, m_a^3\, \frac{\bar{r}_b}{r_b^3}}$$

Tarkastaeltaessa tähtien suhteellista liikettä on komponentin a kiihtyvyys komponentin b suhteen

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}_a - \ddot{\bar{r}}_b = -\frac{G M}{r^3}\,\bar{r} \qquad \left| \; M = \frac{M^3}{M^2} \right.$$

$$= -\frac{G}{r^3}\,\frac{(m_a+m_b)^3}{M^2}\,\bar{r}$$



$$\boxed{\ddot{\bar{r}} = -\frac{G}{M^2}\,(m_a+m_b)^3\,\frac{\bar{r}}{r^3}}$$

Huomautettakoon, että origo on nyt kiihtyvässä liikkeessä, joten kyseessä ei ole inertiaalikoordinaatisto.

Liikeyhtälön $\ddot{\bar{r}} = -\frac{GM}{r^3}\bar{r}$ ratkaisu antaa ratakäyräksi ellipsin, jonka isoakselia saadaan Keplerin III lain avulla:

$$a^3 = \frac{GM}{4\pi^2} \cdot P^2 \quad , \text{ ts. } \quad a \sim \sqrt[3]{GM}$$

Kirjoittamalla lausekkeen GM paikalle edellisissä liikeyhtälöissä näkyvät vakiot $\frac{G}{M^2} m_b^3$, $\frac{G}{M^2} m_a^3$ ja $\frac{G}{M^2}(m_a + m_b)^3$ saadaan ellipsiratojen isoakselien suhteeksi

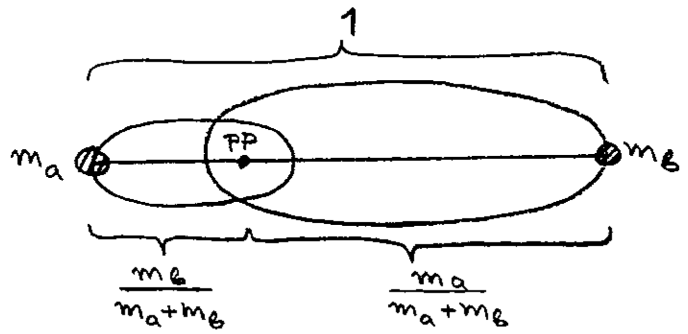
$$a_a : a_b : a_{rel} = \sqrt[3]{\frac{G}{M^2} m_b^3} : \sqrt[3]{\frac{G}{M^2} m_a^3} : \sqrt[3]{\frac{G}{M^2}(m_a + m_b)^3}$$

Nähdään, että edellä esitettyjen liikeyhtälöitten ratkaisuina saadaan kolme samanmuotoista ellipsiä, joitten koot suhtautuvat kuten

$$\boxed{a_a : a_b : a_{rel} = m_b : m_a : (m_a + m_b)}$$

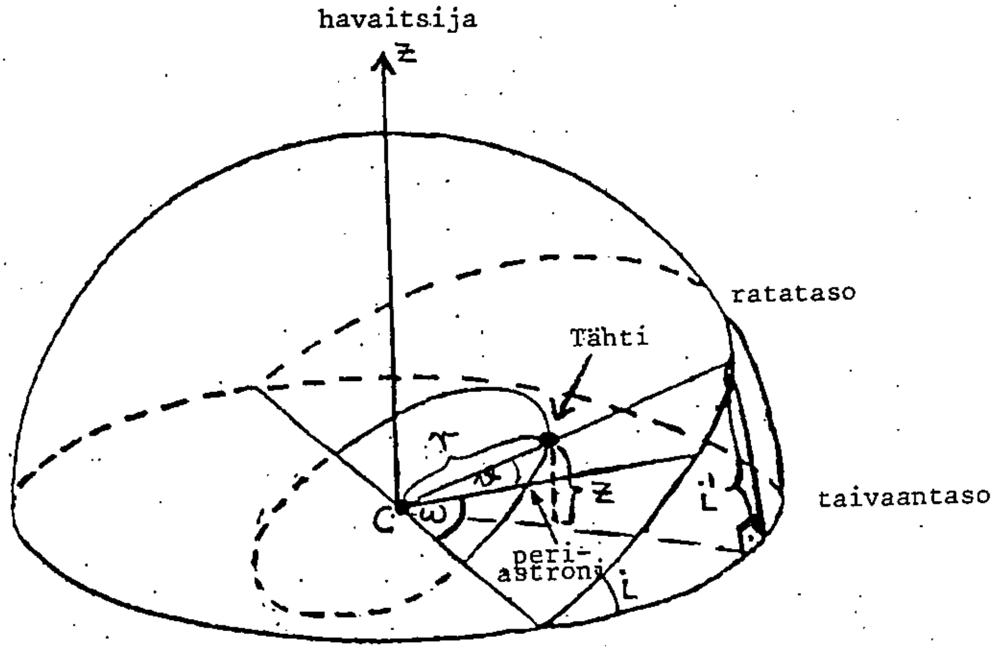
Jos tähtien etäisyydeksi valitaan $r_a + r_b = 1$, niin

$$r_a = \frac{m_b}{m_a + m_b} \quad \text{ja} \quad r_b = \frac{m_a}{m_a + m_b}$$



1.2.2 Kaksoistähtien säteisnopeuskäyrä

Tarkastellaan tähden rataliikkeen projektiota taivaan tasolle, joka on kohtisuorasti havaitsemissuuntaa vasten. Kuvassa havaitsija on kaukana positiivisen z-akselin suunnassa.



C = massakeskipiste

r = tähden paikkavektori

i = radan kaltevuus

i'= tähden paikkavektorin ja taivaantason välinen kulma

ω = periastronin argum. (=nousevan solmun ja periastronin välinen kulma)

ϑ = tähden luonnollinen anomalia

Johdetaan seuraavassa lauseke tähden säteisnopeudelle levossa olevan havaitsijan suhteen :

(*) $V = V_o + \frac{dz}{dt}$, missä v_o= vakiona pysyvä säteisnopeus, jolla koko systeemi liikkuu auringon suhteen

Tähden paikkavektorin projektio z-akselille on

$z = r \sin i'$

Pallokolmion sinilauseen mukaan

$$\frac{\sin i}{\underbrace{\sin 90^\circ}_{=1}} = \frac{\sin i'}{\sin(\omega+\vartheta)} \Leftrightarrow \sin i' = \sin i \sin(\omega+\vartheta)$$

$z = r \sin i \sin(\omega+\vartheta)$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin i \sin(\omega+\vartheta) + \frac{d\vartheta}{dt} r \sin i \cos(\omega+\vartheta)$$

$$\text{KI}: \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}$$

$$\Longrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{a(1-e^2)e\sin\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^2}\frac{d\vartheta}{dt} = r\frac{e\sin\vartheta}{1+e\cos\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\text{KII}: \quad r^2\frac{d\vartheta}{dt} = h \qquad \Bigg| \quad \underbrace{p}_{a(1-e^2)} = \frac{h^2}{MG}, \quad M = m_1+m_2$$

$$a(1-e^2) = \frac{h^2}{MG}$$

$$\Rightarrow h^2 = MG\,a(1-e^2)$$

$$\Longrightarrow \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{h}{r^2} = \frac{\sqrt{MG\,a(1-e^2)}}{r^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dt} = \left[\sin i \sin(\omega+\vartheta)\cdot r\frac{e\sin\vartheta}{1+e\cos\vartheta} + r\sin i\cos(\omega+\vartheta)\right]\frac{\sqrt{MG\,a(1-e^2)}}{r^2}$$

$$= \left[\sin i \sin(\omega+\vartheta)\frac{e\sin\vartheta}{1+e\cos\vartheta} + \sin i\cos(\omega+\vartheta)\right]\frac{\sqrt{MG\,a(1-e^2)}}{r} \qquad \Bigg| \; r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}$$

$$= \left[\sin i\left(\sin(\omega+\vartheta)\frac{e\sin\vartheta}{1+e\cos\vartheta} + \cos(\omega+\vartheta)\right)\right]\sqrt{\frac{MG\,a(1-e^2)}{[a(1-e^2)]^2}}\cdot(1+e\cos\vartheta)$$

$$= \sin i\sqrt{\frac{MG}{a(1-e^2)}}\left[\sin(\omega+\vartheta)e\sin\vartheta + \underbrace{\cos(\omega+\vartheta)(1+e\cos\vartheta)}_{\cos(\omega+\vartheta)+e\cos\vartheta\cos(\omega+\vartheta)}\right]$$

$$= \sin i\sqrt{\frac{MG}{a(1-e^2)}}\left[e\left(\underbrace{\cos\vartheta\cos(\omega+\vartheta) + \sin\vartheta\sin(\omega+\vartheta)}_{\cos[\vartheta-(\omega+\vartheta)] = \cos\omega}\right) + \cos(\omega+\vartheta)\right]$$

$$= \sin i\sqrt{\frac{MG}{a(1-e^2)}}\left[e\cos\omega + \cos(\omega+\vartheta)\right]$$

Sijoittamalla tämä nopeuden lausekkeeseen (*) saadaan

$$V = V_0 + \sqrt{\frac{MG}{a(1-e^2)}}\sin i\left[e\cos\omega + \cos(\omega+\vartheta)\right]$$

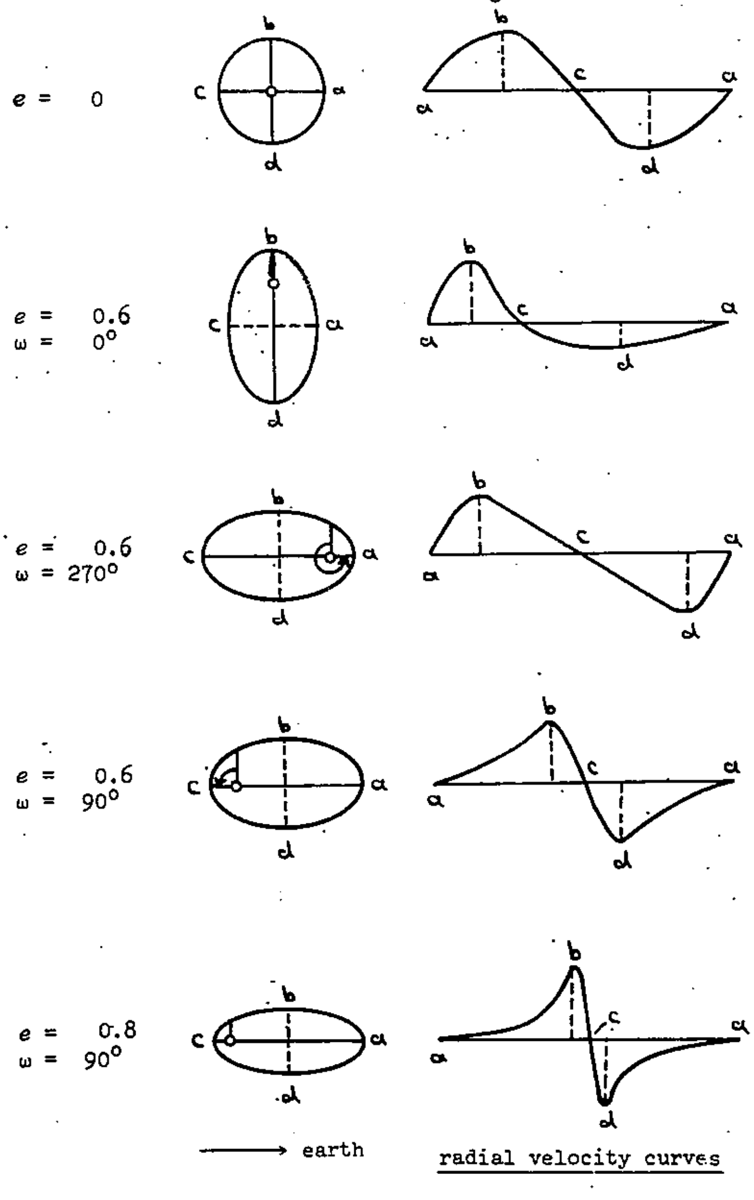
$$\text{KIII}: \quad P^2 = \frac{4\pi^2}{MG}a^3 \Longrightarrow MG = \frac{4\pi^2a^3}{P^2}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\frac{MG}{a(1-e^2)}} = \frac{2\pi}{P}\sqrt{\frac{a^3}{a(1-e^2)}} = \frac{2\pi a}{P}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\boxed{V = V_0 + \underbrace{\frac{2\pi}{P}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}a\sin i}_{K}\left[e\cos\omega + \cos(\omega+\vartheta)\right]}$$

Tässä säteisnopeuden lausekkeessa ovat tuntemattomia suureita v_o, P, asini, e, ω sekä periheliaika t_o (sisältyy luonnolliseen anomaliaan ϑ_o). Tuntemattomat voidaan ratkaista mittaamalla kuusi säteisnopeusarvoa yhden kierroksen aikana (käytännössä mitataan usein kaksoistähden koko säteisnopeuskäyrä). Huomautettakoon, että säteisnopeuskäyrästä ei saada radan isoakselia a eikä inklinaatiota i erikseen vaan ainoastaan suure asini. Jos kummallekin kaksoistähden komponentille säteisnopeuskäyrä on mitattu, saadaan havainnoista $a_1$sini ja $a_2$sini.

Alla olevissa kuvissa 1 ja 2 on esimerkkejä kaksoistähtien säteisnopeuskäyristä eri periastronin pituuksien ω ja eksentrisyyden e arvoilla. Pintalauseen mukaiset nopeudenvaihtelut sekä radan muoto ja asento havaitsijaan nähden aikaansaavat erinäköiset säteisnopeuskäyrät. Kuvassa 2 näkyvän katkoviivan kummankin puolen pinta-alat ovat yhtäsuuret, joten katkoviivan ilmoittama vakionopeus on systeemin massakeskipisteen nopeus v_o Auringon suhteen.



Kuva 1

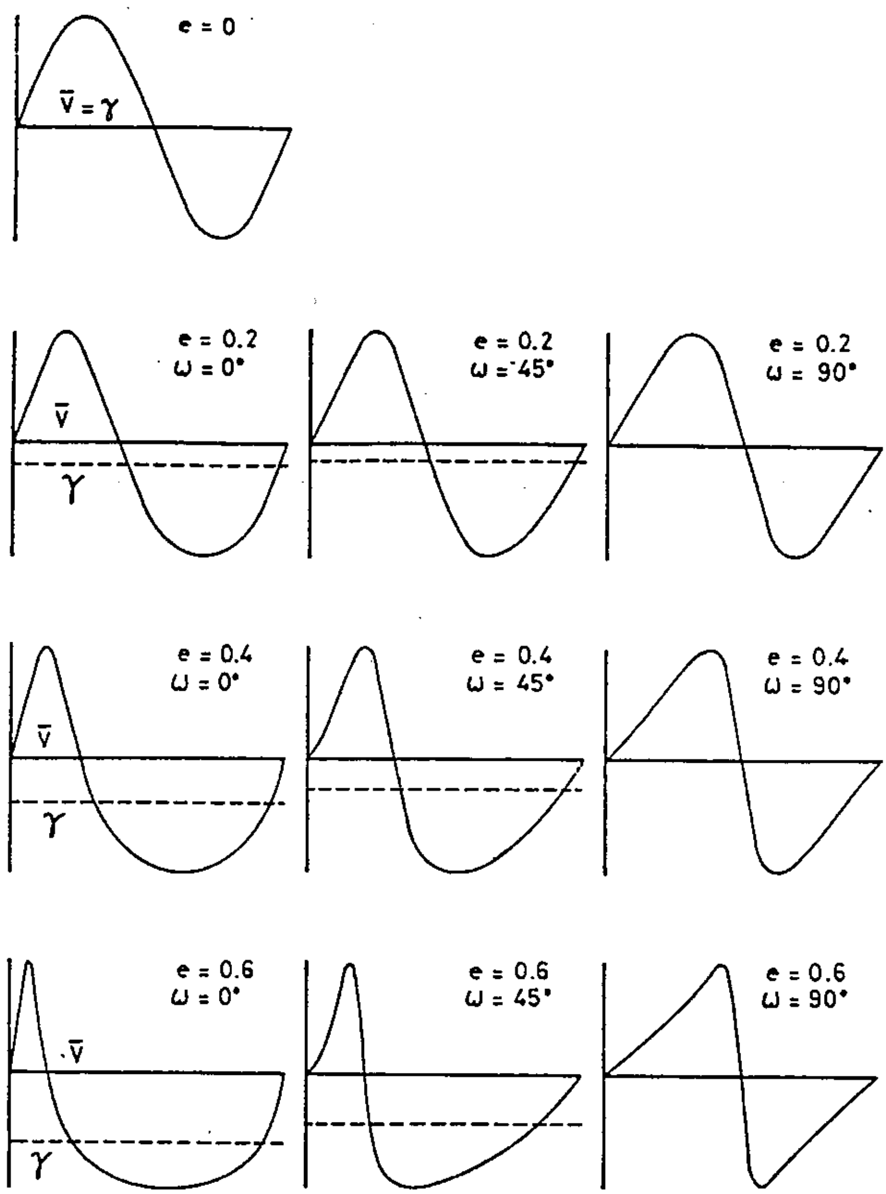


Fig. 2. The shapes of radial-velocity curves for different values of the elements e and ω.

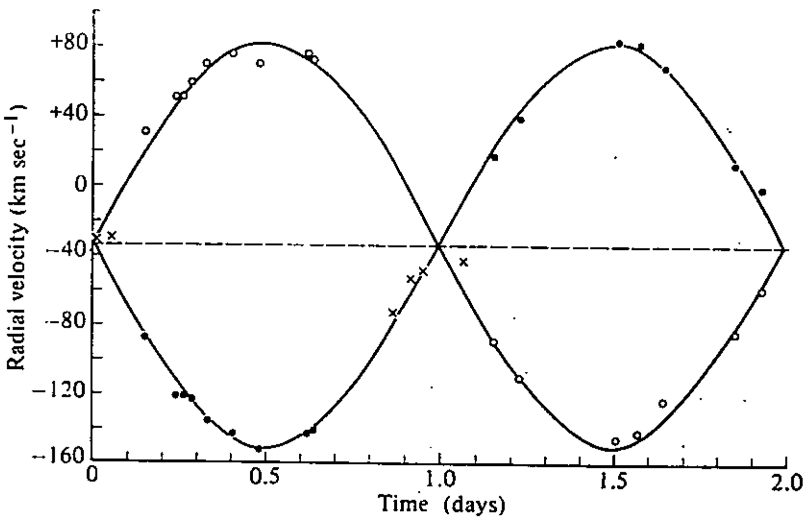
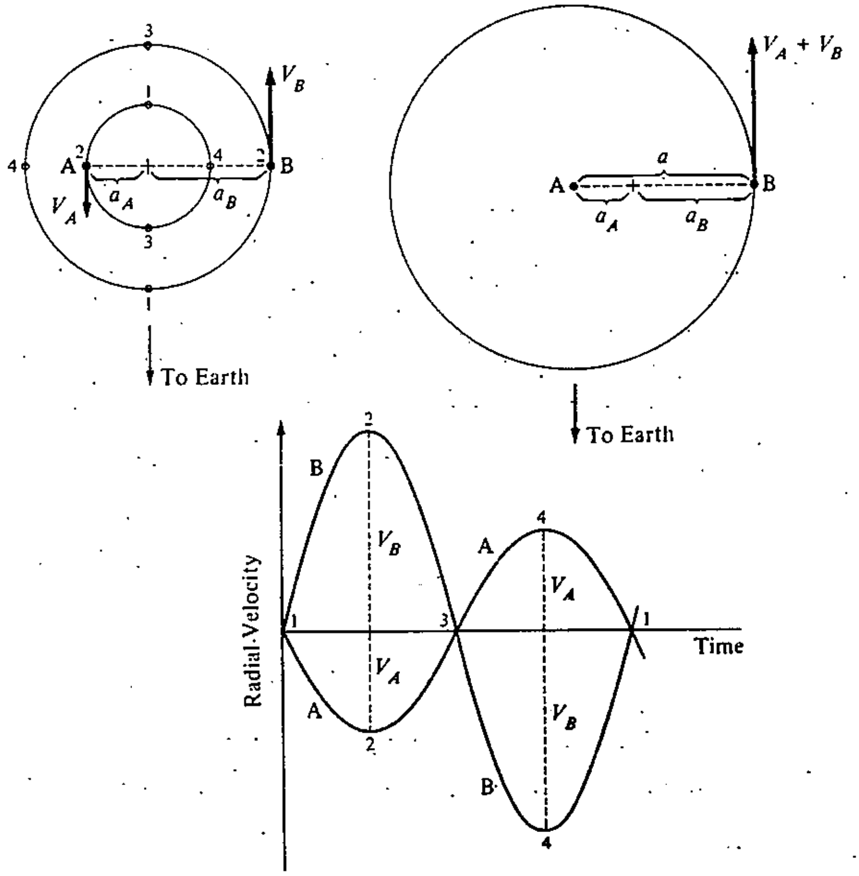


Fig. 3. The Radial Velocities of AR Lacertae. This is a spectroscopic (as well as an eclipsing) binary system, for which the spectra of both components are measurable. *Black dots* refer to the component designated *H* in the text, the *white dots* to component *C*. *Crosses* represent blended spectral lines of the two stars. The abscissa has the same zero point as in Fig. 1-8. [R. F. Sandford, 1951 (103).]

Fig. Correspondence between Positions in the Orbit and Points on the Radial Velocity Curve. The cases of a mass ratio of 2:1 for stars A and B is illustrated.
Upper Left: Orbits of the two components about the center of mass, marked +.
Upper Right: Relative orbit of star B about star A.
Lower: The corresponding radial velocity curves. The amplitude of curve B is twice that of A.



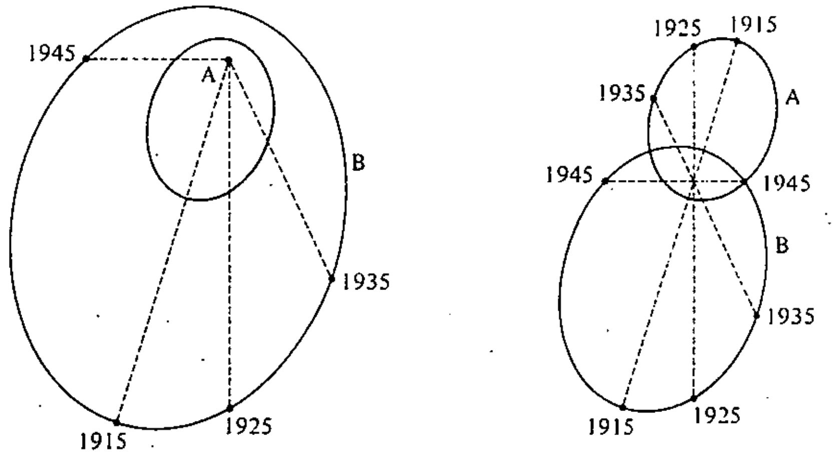


Fig. The Orbits of the Components of the Visual Binary System 99 Herculis.
Left: Relative orbit of star B about star A (larger ellipse) and of the center of mass of the system about star A (smaller ellipse).
Right: Orbits of the two components about their center of mass, located at the intersection of the lines connecting the stars.

The dots are much larger than the actual stars in relation to the size of the orbit. [Adapted from P. van de Kamp, 1958 (32), p. 213.]

1.2.3 Kaksoistähtien massat

Havaintotekniikan perusteella luokitellaan kaksoistähtiä seuraavasti:

Visuaaliset kaksoistähdet	: Komponetit näkyvät (tai ovat interferometrisesti) erillään toisistaan.
Astrometriset kaksoistähdet	: Havaitaan "tähtenä, jolla näkymätön seuralainen" lähinnä näkyvän komponentin jaksollisten paikanmuutosten perusteella (liike systeemin massakeskipisteen ympäri). Tämä ryhmä luokitellaan usein visuaalisten kaksoistähtien alaluokaksi.
Spektroskooppiset kaksoistähdet	: Kaksoistähti paljastuu spektroskoopsilla menetelmillä. Säteisnopeuden jaksollinen muutos havaitaan jaksollisina siirtyminä spektriviivoissa Doppler-efektin perusteella ($\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}$)
Fotometriset kaksoistähdet	: Ratataso on kohtisuorasti taivaanpallon tangenttitasoa vasten, minkä johdosta tähdet vuorotellen peittävät toisensa (valominimit). Tätä ryhmää kutsutaan myös pimennysmuuttujiksi ja luokitellaan usein spektroskooppisten kaksoistähtien alaluokaksi.
Röntgenkaksoistähdet	: Systeemissä hyvin kompakteja komponentteja, jotka voivat olla erillään toisistaan (detached) tai kontaktissa keskenään (esim. Algol, W UMa), jolloin massaa siirtyy komponentista toiseen.

1) Visuaalisen kaksoistähden massanmääritys

Kepler III : $P^2 = \frac{4\pi^2}{MG} a^3$, missä $M = m_1 + m_2$

Havainnoista saadaan a" ja P.

a) Jos toisen komponentin suhteellinen rata toisen ympäri on mitattu (a") ja etäisyys d tunnetaan (a = d*a") voidaan Keplerin III lain avulla kokonaismassa M = m_1+m_2 määrittää.

b) Jos komponeenttien absoluuttiset radat (komponettien liike massakeskipisteen ympäri on mitattu taustataivaan tähtien suhteen) on havaittu, saadaan komponenttien massojen suhde :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2''}{a_1''}$$

c) Jos sekä a) että b) ovat tiedossa, voidaan kummankin komponentin massa määrittää.

2) Astrometrisen kaksoistähden massanmääritys

Jos näkyvän komponentin absoluuttinen rata on mitattu, niin

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{a} &= \frac{m_2}{m_1+m_2} \\ P^2 &= \frac{4\pi^2}{(m_1+m_2)G}\, a^3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2} = \frac{4\pi^2}{G}\,\frac{a_1^3}{P^2}$$

3) Spektroskooppisen kaksoistähden massanmääritys

Ratatason inklinaation ollessa tuntematon saadaan havainnoista vain ratanopeuden v komponentti näkösäteen suunnassa : v_r = v sini (esim. ympyräradan tapauksessa v_r = (2π a/P) sini). Havaitsemalla v_r sekä kiertoaika P saadaan radan isoakselin projektio ja massafunktio seuraavasti:

a) Vain yksi komponentti näkyvissä (kun $\Delta m > 1^m$) ja siten vain yksi spektri käytettävissä.

Radan isoakselin puolikkaan projektio : $a_1 \sin i$

Massafunktio: $$\frac{(m_2 \sin i)^3}{(m_1+m_2)^2} = \frac{m_2 \sin^3 i}{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^2} = \frac{4\pi^2}{G}\,\frac{(a_1 \sin i)^3}{P^2}$$

missä m_1 = havaitun komponetin massa

(Osoitus harjoitustehtävänä)

b) Molempien komponenttien spektrit käytettävissä, mutta vain suhteelliset viivasiirtymät (suhteellinen rata) on mitattu. Tällöin $(a_1+a_2)\sin i = a \sin i$ ja massafunktion lausekkeena on

$$(m_1 + m_2)\sin^3 i = \frac{4\pi^2}{G}\frac{(a \sin i)^3}{P^2}$$

c) Molempien komponettien spektrit käytettävissä ja absoluuttiset viivasiirtymät (absoluuttiset radat) mitattu:

$$\left.\begin{matrix} V_1(\max) \\ V_2(\max) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \sin i \\ a_2 \sin i \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{a_2 \sin i}{a_1 \sin i} \\ P_1 = P_2 = P \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{(kts. harj. tehtävä)}]{\text{K III}} \left\{\begin{matrix} m_1 \sin^3 i \\ m_2 \sin^3 i \end{matrix}\right.$$

Massafunktiot eivät anna yksittäisten komponettien massoja, vaan niitten avulla saadaan ainoastaan tilastollista tietoa kaksoistähtien massoista. Olettamalla, että ratojen inklinaatiot ovat jakautuneet tasaisesti, voidaan $\sin i$ - lausekkeelle antaa keskimääräinen arvo: $\overline{\sin^3 i} = 0.59$. Todettakoon, että koska $\sin i \leq 1$, saadaan edellä esitetyllä menetelmällä vain alarajoja kaksoistähtien massoille.

4) Pimennysmuuttujan massanmääritys

Kummankin komponentin säteisnopeuskäyrä on mitattu. Huomioimalla, että inklinaatio $i = 90^\circ$, voidaan kohdan 3c mukaisesti määrittää massat m_1 ja m_2 (harjoitustehtävä). Pimennysmuuttujien avulla määritetyt massa-arvot ovat erittäin luotettavia, koska pimennysmuuttujien etäisyyksiä ei tarvitse tuntea. Esimerkiksi ympyräradan tapauksessa

$$v_r(\max) = \frac{2\pi a}{P} \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{v_r(\max)}{2\pi}\cdot P$$

ts. a saadaan suoraan kilometreissä, vaikka etäisyys olisi tuntematon.

5) Kertymäkiekon omaavan kaksoistähden massanmääritys

Mikäli lähekkäisissä kaksoistähdissä toinen komponentti on kompakti tähti, virtaa ainetta toisesta tähdestä tähän kompaktiin komponenttiin kertymäkiekon välityksellä. Jos tähdellä on voimakas magneettikenttä, törmää kertymäkiekon aine suurella nopeudella tähden degeneroituneeseen materiaan synnyttäen röntgen- ja optista säteilyä, joka sirottuu kertymäkiekon vapaista elektroneista. Havaittu valo on siten polaroitunutta. Jos tähden magneettikenttä on hyvin voimakas ($\sim 10^8$ Gauss) lähettävät kertymäkiekon nopeat elektronit myös optista syklotronisäteilyä, jonka ympyräpolarisaatioaste voi olla jopa 20%. Koska tähden magneettikentän ja näkösäteen välinen kulma muuttuu kaksoistähden rataperiodin mukana, riippuu havaittu polarisaatioaste rataperiodin vaiheesta. Sovittamalla kolmiulotteinen numeerinen malli havaittuihin intensiteetti- ja polarisaatiokäyriin voidaan kaksoistähtisysteemin geometria (mm. inklinaatio) ratkaista. Näin saadun inklinaation sekä tähtien spektrien viivasiirtymien avulla voidaan edelleen määrittää kaksoistähtikomponenttien massat.

6) Tuloksia kaksoistähtien massanmäärityksistä

Aurinko on ainoa yksinkertainen tähti, jonka massa tunnetaan. Muitten tähtien massat perustuvat kokonaan kaksoistähtihavaintoihin. Ei ole epäilystä kuitenkaan siitä, etteivätkö yksinkertaisten tähtien massat olisi samaa suuruusluokkaa kaksoistähtikomponenttien massojen kanssa.

Tarkkoja ratamäärityksiä on tehty noin 25:lle visuaaliselle kaksoistähdelle, joiden etäisyydet ovat luotettavasti mitattu trigonometristen parallaksien avulla. Näihin havaintoihin perustuvat pienimassaisten tähtien massanmääritykset. (Huom. Auringon ympäristössä suhteellisen runsaasti pienimassaisia tähtiä). Suurimassaisten tähtien massa-arvot on saatu spektroskooppisten kaksoistähtien havainnoista, jolloin etäisyyksiä ei tarvitse tietää. Jos kaksoistähti on samalla pimennysmuuttuja ($i=90^{\circ}$) voidaan tähtien massat yksikäsitteisesti määrittää. Empiirinen massa-luminositeettirelaatio pääsarjan tähdille perustuu juuri visuaalisten ja spektroskooppisten kaksoistähtien massanmäärityksiin.

Tähtien sisäisen rakenteen teoria antaa stabiileille tähdille seuraavat massa-arvot:

$0.09\ M_{\odot} < M < 65\ M_{\odot}$

Luotettavat havainnot puolestaan antavat massarajoiksi

$0.06\ M_{\odot} < M_{\odot} < 35\ M_{\odot}$

Muutamia epävarmoja tapauksia tunnetaan, joissa tähden massa $M \approx 65\ M_{\odot}$.

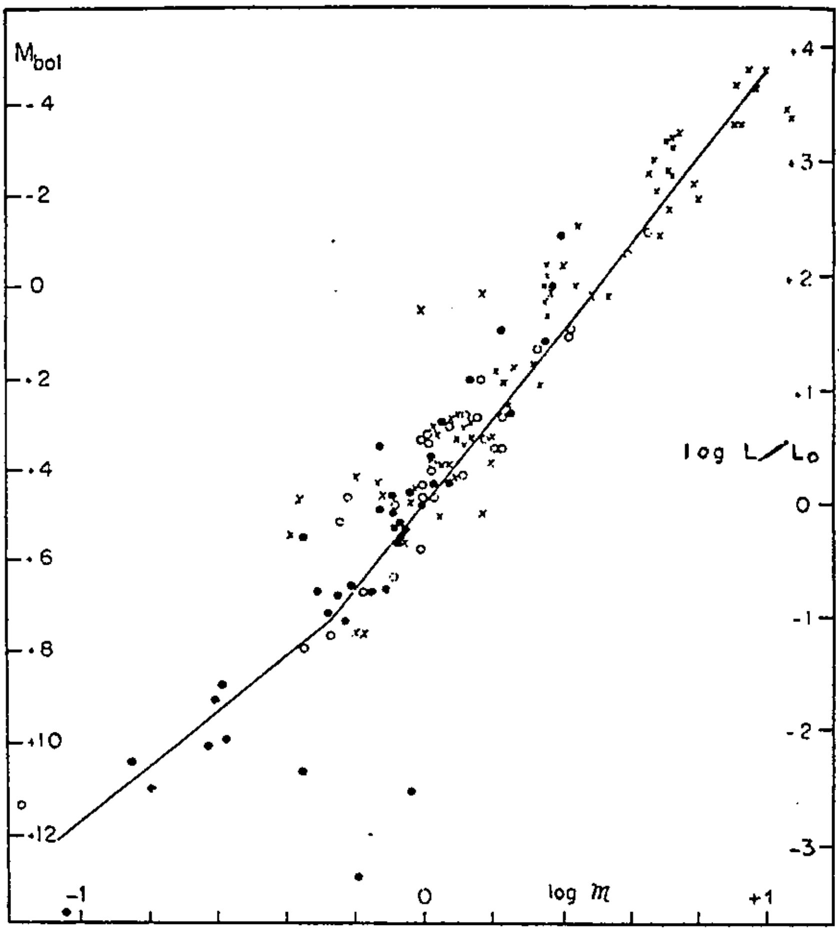


Fig. The empirical mass-luminosity relationship. The symbols distinguish results from visual components (high quality = dots; fair quality = circles) and from eclipsing components (crosses).

Seuraavat riippuvuudet kuvaavat parhaiten kuvan havaintopisteitä:

$M_{bol} = 4.8 - 9.5 \lg M \qquad \lg\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = 3.8 \lg M \qquad ; M > 0.5\ M_{\odot}$

$M_{bol} = 5.8 - 6.0 \lg M \qquad \lg\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = 2.4 \lg M - 0.4 \ ; M < 0.5\ M_{\odot}$

<u>HUOM</u>. Yllä olevia relaatioita voidaan käyttää vain pääsarjan tähdille.

TABLE I
Some visual binaries

Star	Vis.	Mags.	Spectrum	P(yr)	a	e	πtrig	πdyn	Masses		
ADS 61	6.5	7.3	G4V, G8V	106.83	1.432	0.450	0.045	0.053	1.3	1.5	t
ADS 490	5.6	6.3	F8V	6.94	0.20	0.73	0.058	0.039			s
ADS 520	6.3	6.4	G5V	25.0	0.670	0.22	0.070	0.065	0.9	0.9	d
η Cas	3.5	7.2	G0V, M0V	480	11.99	0.497	0.170		0.9	0.6	t
ADS 1538	6.8	6.8	G0V	158.4	1.00	0.69	0.025	0.025	1.3	1.3	d
48 Cas	4.8	6.6	A4V	60.44	0.653	0.345	0.024	0.028	2.1	1.2	d
10 Ari	5.9	7.7	F4V	288	1.256	0.56	0.024	0.020	1.8	1.2	d
ADS 1709	6.7	7.1	F5V	144.7	0.908	0.26	0.031	0.024	1.3	1.3	d
ADS 1865	9.4	9.6	dM2	25.25	0.540	0.17	0.070	0.059	0.6	0.6	d
ε Cet	5.5	5.5	F5	2.67	0.114	0.28	0.059	0.044	1.3	1.3	d
+68° 278	11.6	11.6	dM2	57.7	0.67	0.65	0.054	0.050	0.4	0.4	d
ADS 2959	7.5	8.6	G5V	394.7	2.101	0.65		0.033	1.0	0.7	d
40 Eri BC	9.5	11.2	DB9, M4Ve	252.1	6.943	0.410	0.207		0.4	0.2	t
ADS 3135	7.2	8.2	dF7	91.04	0.561	0.604	0.028	0.021	1.3	1.0	d
ADS 3475	7.4	7.5	dF7	16.30	0.202	0.440	0.024	0.024	1.1	1.1	t
ADS 4153	9.5	10.0	K0	60.60	0.309	0.75		0.017	0.8	0.8	d
σ Ori AB	4.1	5.1	O9V	170	0.247	0.07		0.002	25	10	d
ι Gem	4.9	5.2	G5III	13.17	0.19	0.325	0.026	0.019	2.5	2.3	ds
ADS 5234	7.1	8.9	dG2	114.8	0.860	0.71	0.027	0.030	1.1	0.7	d
α CMa	-1.4	8.6	A1V, DA	50.09	7.50	0.592	0.375		2.3	0.9	t
I 65	6.9	7.1	F5	16.74	0.218	0.43	0.064	0.025	1.3	1.2	d
α Gem AB	1.9	2.9	A1V, A5m	420	6.295	0.33	0.070		2.1	2.1	ts
α CMi	0.5	12	F5IV	40.65	4.548	0.40	0.287		1.8	0.7	t
9 Pup	5.6	6.2	G0V	23.18	0.58	0.69	0.067	0.056	0.6	0.6	t
ADS 6483	7.0	7.1	dF6	57.04	0.440	0.77		0.022	1.3	1.3	d
ζ Cnc AB	5.6	5.9	F8V	59.7	0.884	0.32	0.047	0.042	1.0	0.9	t
ADS 6914	5.4	6.7	dG6	145.0	1.700	0.13	0.058	0.046	1.4	1.0	d
ε Hya AB	3.8	5.0	G0IV	15.05	0.238	0.67		0.027	1.7	1.4	d
Kpr 37	4.2	6.1	F5V	21.85	0.619	0.15	0.074		0.8	0.4	t
κ UMa	4.3	4.5	B9n	70.1	0.27	0.04	0.010	0.009	4.9	4.8	d
13 UMa	5.0	8.2	F7IV	1067	6.20	0.814	0.052	0.046	1.4	0.8	d
φ 347	7.2	7.2	G5	2.65	0.126	0.31	0.062	0.057	0.8	0.8	d
ADS 7284	7.9	8.0	dK4	34.20	0.660	0.35	0.057	0.055	0.7	0.7	t
φ 363	6.2	6.2	F2	3.20	0.124	0.51	0.051	0.043	1.2	1.2	d
ω Leo	6.0	6.7	dF8	116.85	0.875	0.56	0.028	0.026	1.6	1.3	d
ψ Vel	4.1	4.6	F2IV	34.11	0.920	0.440	0.059	0.061	1.6	1.4	d
γ Sex	5.7	6.2	A0n	75.60	0.385	0.70		0.012	2.8	2.5	d
ADS 7685	8.3	10.0	G5V	157.5	0.845	0.949		0.025	0.9	0.6	d
p Vel	4.4	5.3	F2, A3	16.30	0.340	0.73	0.033	0.034			s
ADS 7871	8.1	9.9	dF6	241.1	0.51	0.09	0.019	0.011	1.5	0.9	d
χ^1 Hya	5.8	5.9	dF4	7.40	0.140	0.285	0.033	0.025	1.7	1.6	d
ξ UMa Aa-B	4.4	4.9	G0IV	59.84	2.530	0.414	0.130		1.1	0.9	ts
ι Leo	4.0	6.7	F2IV	204.5	1.960	0.55	0.047	0.039	2.1	1.0	d
Brs 5	7.6	8.6	K7V	421.6	5.760	0.68	0.085	0.099	0.6	0.5	d
ADS 8197	5.8	7.1	F6V	72.87	0.813	0.398	0.048	0.034	1.3	1.1	d
γ Cen	2.9	2.9	A0III	84.59	0.939	0.789	0.010	0.025	3.8	3.8	d
γ Vir	3.7	3.7	F0V, F0V	171.4	3.746	0.881	0.090	0.083	1.2	1.2	t
α Com	5.1	5.1	F5V	25.83	0.672	0.494	0.038	0.039	1.6	1.7	t
ADS 8862	9.0	9.7	M2V	48.85	1.465	0.225	0.119	0.115	0.5	0.3	t
I 365	6.3	6.6	F8	34.80	0.498	0.80		0.035	1.2	1.2	d

TABLE II
Some spectroscopic binaries

Star	Mag	Sp.	$P(d)$	e	K_1	K_2	Min. Masses or Mass Function
α Phe	2.3	K0	3848.8	0.34	5.8		0.07
π And	4.4	B3, B3	143.61	0.56	47.5	117.4	26.9 10.9
ζ And	5.1	K0	17.77	0.02	26.0		0.03
ζ Phe	3.9	B6	1.67	0.03	121.4	247	6.0 3.0
γ Phe	3.4	K5	193.79	0.00	16.0		0.08
δ Tri	4.9	G0	9.93	0.06	8.8		0.0007
o Per	3.8	B1	4.42	0.04	109.3	159.4	5.2 3.6
52 Per	4.7	G5, A2	1576.44	0.05	43.1		0.74
63 Tau	5.6	Am	8.42	0.10	37.6		0.05
66 Eri	5.2	B9	5.52	0.07	97.0	111.0	2.5 2.2
α Aur	0.0	G5, G0	104.02	0.00	26.4	27.5	2.7 2.5
δ Ori	2.2	B1	5.73	0.08	101.0	263	20.5 7.9
θ Ori B	7.8	B0	6.50	0.14	81		0.35
ι Ori	2.8	O8	29.14	0.76	115.2	195.8	15.9 9.4
136 Tau	4.6	A0	5.97	0.02	48.9	71	0.6 0.4
δ Col	3.9	G5	868.78	0.70	10.6		0.04
τ Pup	2.8	K0	1066.0	0.09	4.1		0.008
19 Lyn	5.6	B8, B8	2.26	0.08	106.4	199.1	4.3 2.3
63 Gem	5.2	F5	1.93	0.00	94.6	116.8	1.0 0.8
δ Gem	4.3	K0	19.60	0.02	34.2		0.08
1 Hya	5.6	F1	1.56	0.05	30.3		0.004
ϵ Hya C	6.9	F5	9.90	0.62	35.0		0.02
o Leo	3.5	F5, A3	14.50	0.00	54.1	63.1	1.3 1.1
30 UMa	5.0	A0	11.58	0.38	34.1		0.04
ω Uma	4.7	A0	15.83	0.30	22.2		0.02
ξ UMa A	4.4	G0	669.1	0.56	8.3		0.8 0.3
ξ UMa B	4.9	G0	3.98	0.00	5.0		0.00005
95 Leo	5.5	A2, A2	6.63	0.02	57.6	80	1.0 0.7
ζ UMa A	2.3	A2	20.54	0.54	67.6	68.8	1.7 1.6
α Vir	1.0	B2, B3	4.01	0.15	117.2	193.6	7.5 4.5
3 Boo	5.8	F5	36.04	0.49	54.0	65.8	2.3 1.9
α Dra	3.7	A0 p	51.42	0.38	46.9		0.44
12 Boo	4.8	F5, F5	9.60	0.17	68.4	72.0	1.4 1.3
β CrB	3.7	F0 p	3834	0.41	9.2		0.24
ψ^2 Lup	4.5	B6	12.26	0.19	63.3	66.4	1.3 1.3
ϵ Her	3.9	A2	4.02	0.02	70.7	112	1.6 1.0
χ Dra	3.6	F8	280.53	0.45	18.0		0.12
δ^2 Tel	5.3	B6	21.71	0.22	34.9		0.09
46 Dra	5.1	A0, A0	9.81	0.02	28.1	34.1	0.1 0.1
2 Sge	6.0	A3	7.39	0.05	52.8	77.6	1.0 0.7
θ Aql	3.2	B9, B9	17.12	0.61	51.0	63.7	0.8 0.6
18 Vul	5.5	A2	9.32	0.01	78.5	86.3	2.3 2.1
35 Cyg	5.2	F5	2440	0.51	9.6		0.14
α Pav	2.0	B3	11.75	0.01	7.2		0.0005
57 Cyg	4.8	B3, B3	2.85	0.14	117	126	2.1 2.0
77 Cyg	5.5	A0	1.73	0.03	109.7	110.3	0.9 0.9
14 Peg	5.0	A0	5.30	0.53	37.0	40.4	0.1 0.1
2 Lac	4.6	B5, B6	2.62	0.00	74.8	96	0.8 0.6
HD 214479	9.1	M1, M1	4.08	0.01	46.8	58.1	0.3 0.2
74 Peg	6.1	A0	11.23	0.04	26.7		0.02

1.3 LINNUNRADAN ROTAATIO JA MASSAJAKAUTUMA

1.3.1 Linnunradan massamalli

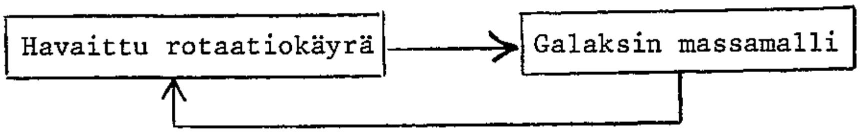
Probleema: Miten tähdet liikkuvat kaikkien muitten tähtien aikaansaamassa gravitaatiokentässä?

Teoreettisesti probleemaa olisi käsiteltävä n-kappaleen probleemana, jossa massakappaleen m_i liikeyhtälö on

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = - \sum_{k=1}^{n} G\, m_i m_k \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_k}{r_{ik}^3}$$

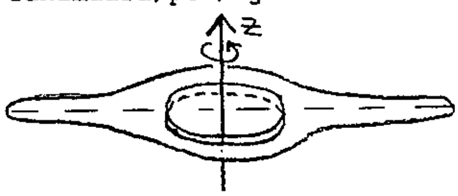
Siis periaatteessa 3n kappaletta 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöä, joitten ratkaisemiseksi joudutaan suorittamaan 6n integrointia, joista vain 10 voidaan ratkaista suljetussa muodossa.

Onneksi on havaintoja Linnunradan tähtitiheyksistä sekä rotaatiokäyrästä, jolloin probleemaa voidaan lähestyä seuraavasti. Havaitsemalla Linnunradan (tai muun galaksin) rotaatiokäyrä (tähden ratanopeus galaksikeskuksen ympäri tähtien ja galaksikeskuksen välisen etäisyyden funktiona) voidaan laatia ensimmäinen karkea malli Linnunradan massajakautumalle. Vertaamalla massamallin teoreettista rotaatiokäyrää havaintoihin saadaan massamallia täsmennettyä.



Galaksin massajakautuma määräytyy tähtijakauman perusteella. Linnunradassa kasvaa tähtitiheys (=tähtien lukumäärä/pc^3) ja siten massatiheys (g/cm^3)

1) Linnunradan tasoa kohden
2) Linnunradan keskustaa kohden



Tarkastellaan seuraavassa aksiaalisymmetristä massamallia, jossa tähdet liikkuvat ympyräradalla galaksin tasossa (z=0) ratanopeudella $v = \Theta(r)$ (perinteinen merkintätapa Linnunradan dynamiikassa).

Kiihtyvyyden radiaalikomponetti:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 \qquad \text{ympyräliikkeessä: } \ddot{r} = 0$$

$$a_r = -\frac{(r\dot{\vartheta})^2}{r} = -\frac{\Theta^2(r)}{r}$$

Toisaalta radiaalikiihtyvyys voidaan lausua gravitaatiopotentiaalin ϕ gradienttina:

$$a_r(r) = -\left[\frac{\partial \phi(r,z)}{\partial r}\right]_{z=0} \Longrightarrow \phi(r,0) = \int \vec{a}_r \cdot d\vec{r} \qquad \Big| \; a_r = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\phi(r,z) = -G \int_{\substack{\text{koko}\\ \text{galaksi}}} \frac{\rho(r',z')\,dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Kun massajakauma (keskimääräinen tiheys ρ) tunnetaan tai oletetaan tunnetuksi, voidaan gravitaatiopotentiaali laskea galaksin jokaisessa pisteessä. Kytkentä gravitaatiopotentiaalin ϕ ja rotaatiokäyrän $\Theta(r)$ välillä on:

$$\boxed{a_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\Theta^2(r)}{r}}$$

<u>ESIM:</u> Määritä rotaatiokäyrän muoto, kun massamallina on homogeeninen, r_o-säteinen pallo.

a) <u>Pallon sisäpuolella</u>

säteen r sisäpuolelle jäävä massa: $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho$

$$\underbrace{a_r}_{} = -G\frac{M(r)}{r^2}$$

$$-\frac{\Theta^2(r)}{r} = -G\frac{4\pi r^3 \rho}{3r^2}$$

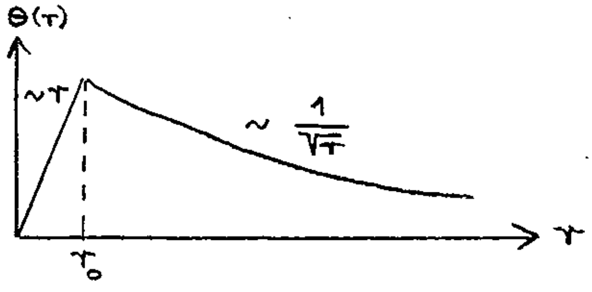
$$\Theta(r) = r\sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho} \qquad \sim r$$

b) <u>Pallon ulkopuolella</u>

$$a_r = -G\frac{M}{r^2} \quad , \; M = \frac{4}{3}\pi r_o^3 \cdot \rho$$

$$-\frac{\Theta^2(r)}{r} = -G\,\frac{4\pi r_0^3\,\varrho}{3\,r^2}$$

$$\Theta(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$$



Seuraavalla sivulla on esitetty muutamien galaksien havaittuja rotaatiokäyriä.

Linnunradan vanhemmissa massamalleissa on käytetty
-pallomaista massajakaumaa (pistemassa galaksin keskustassa)
-homogeenista pyörähdysellipsoidia
-pallomaista jakaumaa + litteä ellipsoidi
Ehkä eniten käyetty malli on Schmidtin massamalli vuodelta 1965:

epähomogeeninen pyörähdysellipsoidi+ massapiste Linnunradan keskustassa

Epähomogeeninen pyörähdysellipsoidi kuvataan samankeskisillä ellipsoidikuorilla, joilla jokaisella on oma tiheytensä.

Massamallin avulla voidaan laskea esimerkiksi Linnunradan kokonaismassa (katso harjoitustehtävää). Schmidtin massamalli antaa tulokseksi:

M(pyörähdysellipsoidi) $= 1.75\times10^{11}\ M_\odot$
M(keskus) $= 0.07\times10^{11}\ M_\odot$
kokonaismassa $= 1.82\times10^{11}\ M_\odot$

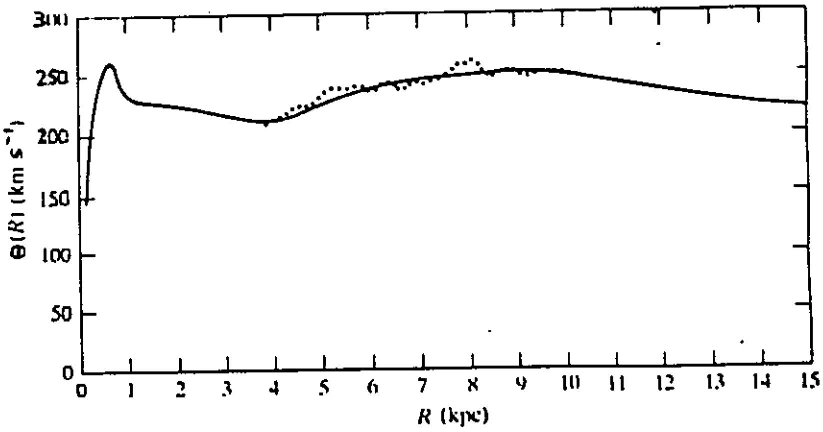


Figure The rotation curve Θ(R) for the inner parts of our Galaxy as derived from 21-cm observations by W. W. Shane and G. P. Bieger-Smith (S4). Individual data points are plotted as dots, and the smooth curve is from dynamical models. [From (B15). Reproduced with permission from the *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Volume 14. Copyright © 1976, Annual Reviews, Inc.]

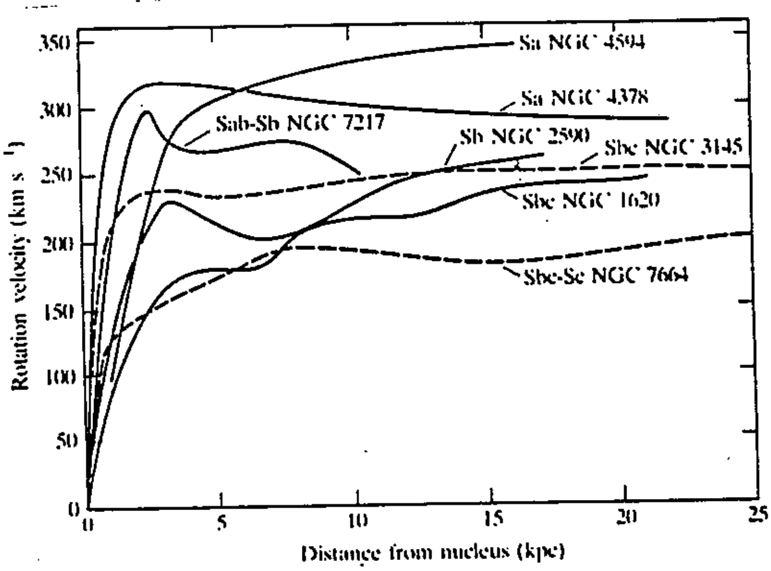


Figure Rotation curves of spiral galaxies, obtained from optical measurements. [From (R8), by permission. Copyright © 1978 by the American Astronomical Society.]

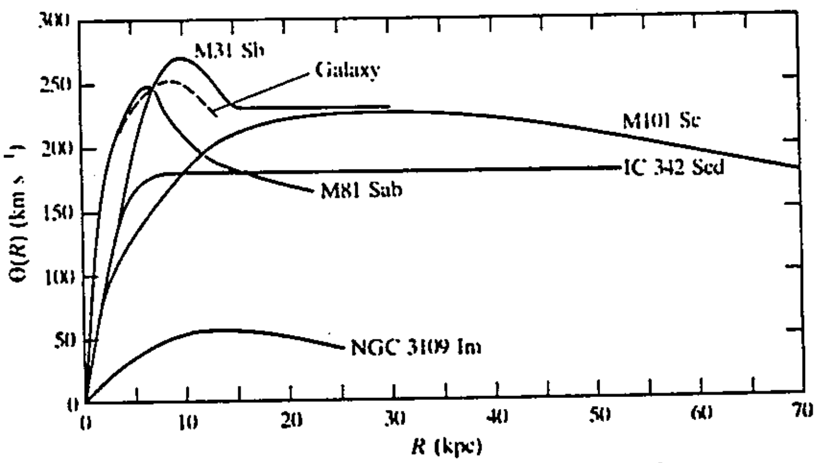
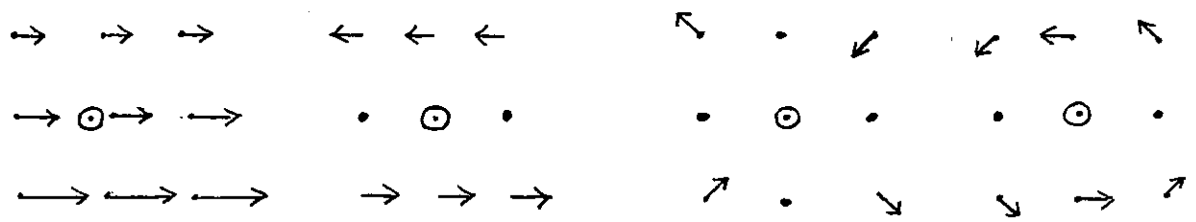


Figure Rotation curves for spiral galaxies (including our Galaxy) from 21-cm line radio measurements. Notice that the rotation curves of M31 and IC 342 show no evidence for an outward decline and that we have no reliable information about our Galaxy's rotation curve beyond the solar radius. [Data from (H3, 331), (H4), (R1), and (R5).]

1.3.2 Linnunradan differentiaalisen rotaation kaavat

Linnunrata ei pyöri jäykän kappaleen tavoin, vaan eri etäisyyksillä galaksin keskustasta olevat tähdet liikkuvat eri nopeuksilla. Ulompana olevan tähden kiertonopeus galaksin keskustan ympäri on pienempi kuin lähempänä keskustaa kiertävän tähden nopeus

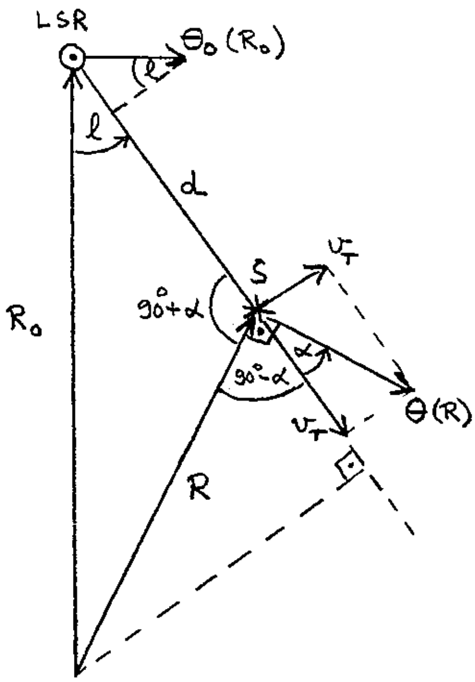


absoluuttinen nopeuskenttä	suhteellinen nopeuskenttä (Auringon suhteen)	radiaalinopeus-kenttä Auringon sunteen	tangentiaali-nopeuskenttä Auringon suht.

Määritellään Auringon lähiympäristölle nopeuskoordinaatisto LSR (=local standard of rest), joka kiertää galaksin keskustaa ympyrärataa pitkin. Jos siis tähden $v_{LSR}=0$, kiertää tähti galaksin keskustaa ympyräradalla.

HUOM. 1 Auringon v_{LSR} ei ole tarkalleen nolla

HUOM. 2 LSR voidaan myös määritellä Auringon lähiympäristön nuorten tähtien kinemaattisena painopisteenä.



C = galaksin keskus

S = tarkasteltava tähti

$\Theta_0(R_0) = v_\odot$ = Auringon ratanopeus galaksin keskustan suhteen

R_0 = Auringon etäisyys galaksin keskustasta

R = tarkasteltavan tähden etäisyys galaksin keskustasta

$\Theta(R) = v_*$ = tähden ratanopeus galaksin keskustan suhteen

d = tähden etäisyys LSR:stä

l = galaktinen pituus

Olkoon tähden S radiaalinopeus LSR:n suhteen v_r

$$v_r = (v_*)_r - (v_\odot)_r$$

$$v_r = \Theta(R)\cos\alpha - \Theta_0(R_0)\sin l$$

$\cos\alpha$ lausutaan sinilauseen avulla kolmiosta OCS :

$$\frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{\sin l} = \frac{\cos\alpha}{\sin l} = \frac{R_0}{R}$$

$$\Longrightarrow \cos\alpha = \frac{R_0}{R}\sin l$$

$$v_r = \left[\frac{\Theta(R)\cdot R_0}{R} - \Theta_0(R_0)\right]\sin l$$

$$v_r = R_0\left[\frac{\Theta(R)}{R} - \frac{\Theta_0(R_0)}{R_0}\right]\sin l$$

$\frac{\Theta}{R} = \omega(R)$ = kulmanopeus galaksin keskustan ympäri

$$\boxed{v_r = R_0\left[\omega(R) - \omega(R_0)\right]\sin l}$$

Vastaavasti on tähden tangentiaalinopeus LSR:n suhteen

$$v_t = (v_*)_t - (v_\odot)_t$$

$$v_t = \Theta(R)\cdot\sin\alpha - \Theta_0\cos l$$

Edellisen sivun kuviosta saadaan lauseke $\sin\alpha$:lle :

$$R_0\cos l = d + R\underbrace{\cos(90^\circ-\alpha)}_{\sin\alpha}$$

$$\Longrightarrow \sin\alpha = \frac{R_0}{R}\cos l - \frac{d}{R}$$

$$v_t = R_0\left[\frac{\Theta(R)}{R} - \frac{\Theta_0}{R_0}\right]\cos l - \frac{\Theta(R)}{R}d$$

$$\boxed{v_t = R_0\left[\omega(R) - \omega(R_0)\right]\cos l - \omega(R)\,d}$$

Auringon lähiympäristössä $d \ll R_o$ ja $|R-R_o| \ll R_o$, joten kulmanopeuksien erotuslauseke voidaan kirjoittaa $(R-R_o)$:n sarjakehitelmänä, josta huomioidaan vain 1. kertaluvun termit (harjoitustehtävä). Näin saadaan <u>Oortin kaavat</u>, jotka kuvaavat Auringon kiertoliikettä galaksin keskustan ympäri ensimmäisessä approksimaatiossa:

$$\boxed{\begin{aligned} v_r &= A \cdot d \cdot \sin 2\ell \\ v_t &= (A \cos 2\ell + B)\, d \end{aligned}}$$

missä Oortin vakiot A ja B on määritelty seuraavasti:

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{\Theta_o}{R_o} - \left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_{R_o}\right]$$

$$B = -\frac{1}{2}\left[\frac{\Theta_o}{R_o} + \left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_{R_o}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{\Theta_o}{R_o} &= \omega(R_o) = A - B \\ \left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_{R_o} &= -(A+B) \end{aligned}}$$

A ja B saadaan havainnoista, joten R_o ja Θ_o voidaan määrittää.
Nykyisin hyväksytyt arvot: $A = 15$ (km/s)/kpc

$B = -10$ (km/s)/kpc

$\Theta_o = 250$ km/s

$R_o = 10$ kpc

Oortin vakioitten perusteella on LSR:n kulmanopeus $\omega(R_o) = 0\overset{''}{.}0053$/vuosi, joten LSR:n kiertoajaksi saadaan 246×10^6 vuotta. Kun Auringon ikä on noin 4.5×10^9 vuotta, on Aurinko ehtinyt tähän saakka tehdä noin 20 kierrosta Linnunradan keskustan ympäri.

HUOM. Jos Linnunradan massamallina käytettäisiin pallomaista massajakautumaa (jolloin koko galaksin massa voidaan korvata keskustaan sijoitetulla massapisteellä), olisi Auringon liike Keplerin liikettä. Galaksin kokonaismassa olisi tällöin:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_0^2(R_0) &= \frac{GM}{R_0} \\ \Theta_0 &= 250 \text{ km/s} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow M = 1.5 \times 10^{11}\, M_\odot$$

Havainnoista saadut Oortin vakiot A ja B osoittavat kuitenkin, että (1/R)-potentiaalin oletus ei aivan päde:

$$\frac{m\Theta^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

$$\Theta^2 = \frac{GM}{R} \qquad \Big|\ \text{differentioidaan}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\Theta}{dR} = -\frac{GM}{R^2}\,\frac{1}{2\Theta} \qquad \Big|\ \text{sijoitetaan}: \quad M = \frac{\Theta^2 R}{G}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\Theta}{dR} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Theta}{R}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Longrightarrow \frac{\Theta/R}{d\Theta/dR} = -2 \\ &\text{toisaalta:} \\ &\frac{A-B}{-(A+B)} = \frac{\Theta_0/R_0}{(d\Theta/dR)_{R_0}} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left(\frac{A-B}{A+B}\right)_{teor} = 2$$

Sijoittamalla tähän havaintojen perusteella määritetyt Oortin vakiot A ja B saadaan kuitenkin

$$\left(\frac{A-B}{A+B}\right)_{hav} = 5$$

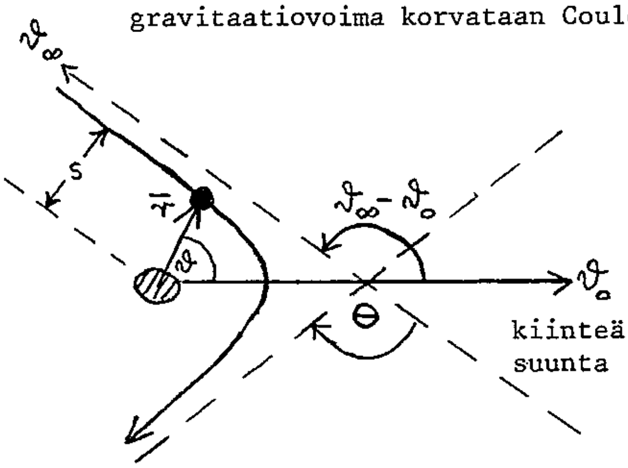
1.4 TÄHTIEN SIROTTUMINEN JA DYNAAMINEN JARRUTUS

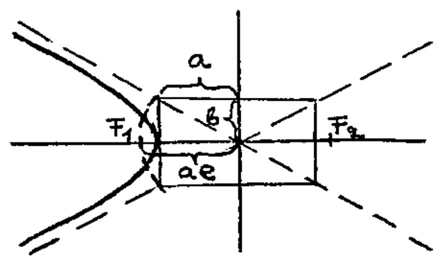
Edellisessä luvussa tarkasteltiin säännöllisten voimien vaikutusta tähtien liikkeeseen. Seuraavassa tarkastellaan epäsäännöllisten voimien aiheuttamia häiriöitä tähtien liikeradoissa (esim. tähtien "kohtaamiset") sekä palautumista tilastolliseen nopeustasapainoon.

1.4.1 Tähtien sirottuminen $(1/r^2)$-voimakentässä

Tarkastellaan tähteä, joka lähestyy suunnasta ϑ_∞ toista tähteä. Kyseessä on kahden kappaleen probleema, jossa kuvataan lähestyvän kappaleen suhteellista rataa "paikallaan" olevaan kappaleeseen nähden.

HUOM. Todettakoon, että tähden sirottumisen kaavat pätevät myös Coulombin kentässä (esim. elektroni ohittaa protonin) kunhan gravitaatiovoima korvataan Coulombin voimalla.





Θ = sirontakulma

s = törmäysparametri

$2a$ = hyperbelin isoakseli

$2b$ = hyperbelin pikkuakseli $= 2a\sqrt{e^2-1}$

Kahden kappaleen probleeman ratkaisuna saadaan kartioleikkauksen yleinen yhtälö (kts. liite s. A7)

$$r = \frac{1}{\frac{MG}{h^2} + \sqrt{\frac{M^2G^2}{h^4} + \frac{2E}{h^2}}\cos(\vartheta - \vartheta_0)} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{MG}{h^2} + \sqrt{\frac{M^2G^2}{h^4} + \frac{2Eh^2}{h^4}}\cos(\vartheta - \vartheta_0)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{MG}{h^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{M^2G^2}}\cos(\vartheta - \vartheta_0)\right]$$

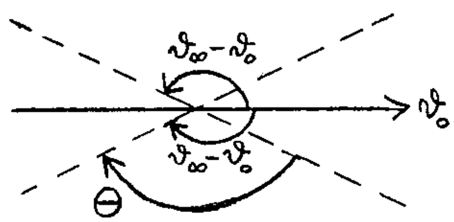
Kun $r \to \infty$, niin $1/r \to 0$

$$\Longrightarrow \sqrt{1+\frac{2\varepsilon h^2}{M^2G^2}}\cos(\vartheta_\infty-\vartheta_0) = -1$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\varepsilon h^2}{M^2G^2}}} = \cos(\vartheta_\infty-\vartheta_0) = -\frac{a}{\underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{ae}} = -\frac{1}{e}$$

Tätä kosiniarvoa vastaa kaksi ϑ_∞:n arvoa: lähestyvän tähden ϑ_∞ ja etääntyvän tähden ϑ_∞ .

Sirontakulma Θ saadaan viereisestä kuviosta ilmenevästä relaatiosta :



$$\Theta = 2(\vartheta_\infty-\vartheta_0)-\pi$$

$$\Longrightarrow \sin\frac{\Theta}{2} = \sin\left[(\vartheta_\infty-\vartheta_0)-\frac{\pi}{2}\right] = -\cos(\vartheta_\infty-\vartheta_0)$$

$$\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\varepsilon h^2}{M^2G^2}}}$$

Kytketään pintanopeus h törmäysparametriin s:

$$\begin{cases} h = r^2\dot{\vartheta} = s v_0 \\ \varepsilon = \dfrac{v_0^2}{2} \end{cases}$$

, v_0=tähden lähestymisnopeus suurella etäisyydellä

$$\Longrightarrow h^2 = s^2 v_0^2 = 2\varepsilon s^2$$

$$\Longrightarrow \sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\varepsilon s}{MG}\right)^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\boxed{\cot\frac{\Theta}{2} = \frac{2\varepsilon s}{MG}}$$

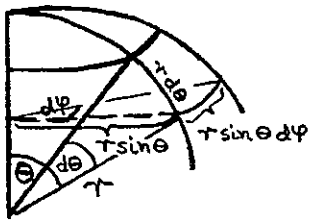
SIRONTAKULMAN KAAVA

Tähden sirontakulma riippuu täten lähestyvän tähden alkuperäisestä liike-energiasta massayksikköä kohden ($\varepsilon = \frac{1}{2}v_0^2$), törmäysparametrista s sekä systeemin kokonaismassasta ($M=m_1+m_2$).

Tähtitiheys määrää sen, kuinka usein tähtien kohtaamisia tapahtuu. Oletetaan seuraavassa, että saapuvien kappaleiden massat ovat yhtäsuuret ($\Rightarrow$ M=vakio) ja että niillä on sama lähestymisnopeus v_o ($\Rightarrow$ sama $\mathcal{E}$). <u>Sironnan differentiaalinen vaikutusala $\sigma(\theta)$</u> määritellään seuraavasti:

$$\sigma(\theta)d\Omega = \frac{\text{aikayksikössä sironneiden kappaleiden lukumäärä/cm}^2}{\text{aikayksikössä saapuvien kappaleiden lukumäärä/cm}^2}$$

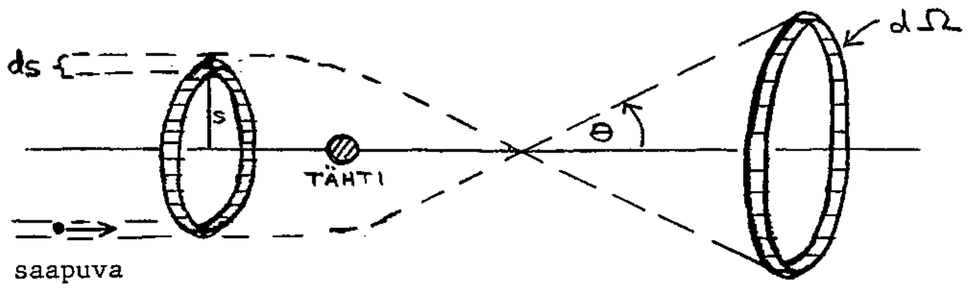
missä avaruuskulma-alkio $d\Omega = \frac{dA}{r^2}$



$$d\Omega = \frac{r\,d\theta \cdot r\sin\theta\, d\varphi}{r^2}$$

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta \quad \text{(integroitu } \varphi \text{ :n yli)}$$

Tarkasteltavaa tähteä lähestyvistä kappaleista siroavat kulmaan $d\Omega$ ne, joitten törmäysparametrien arvot ovat välillä s,...s+ds.



Toisinsanoen aikayksikössä avaruuskulma-alkioon $d\Omega$ sironneiden kappaleiden lukumäärä/cm^2 on oltava sama kuin ds-paksuisen renkaan läpi menneitten kappaleitten lukumäärä.

$$\sigma(\theta)\cdot 2\pi \sin\theta\, d\theta = -2\pi s\, ds$$

miinusmerkki, koska s ja θ kasvavat vastakkaisiin suuntiin

$$\Rightarrow \quad \sigma(\theta) = -\frac{s\,ds}{\sin\theta\, d\theta}$$

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{2\mathcal{E}s}{MG} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{MG}{2\mathcal{E}}\cot\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{MG}{2\mathcal{E}}\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(\theta) = -\frac{MG}{2\mathcal{E}}\underbrace{\frac{\cot\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}}_{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\left[-\frac{1}{2}\frac{MG}{2\mathcal{E}}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right]$$

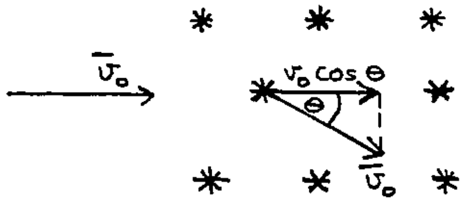
$$\sigma(\theta) = \left(\frac{MG}{2\varepsilon}\right)^2 \frac{\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}{2\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\boxed{\sigma(\theta) = \frac{1}{4}\left(\frac{MG}{2\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}}$$ SIRONNAN DIFFERENTIAALINEN VAIKUTUSALA

1.4.2 Tähden liikkeen dynaaminen jarrutus

Tarkastellaan seuraavassa "levossa" olevaa tähtijärjestelmää, jonka läpi kulkee tähti alkunopeudella v_0. Tämä tähti siroaa periaatteessa jokaisen levossa olevan tähden vetovoimakentässä (sirontakulma tosin erittäin pieni), jolloin sen nopeus alkuperäiseen liikesuuntaan nähden pienenee määrällä

$$\Delta v = v_0 - v_0\cos\theta$$



Tähden liikettä jarruttava voima on siten

$$F = \sum \frac{\mu_i\,\Delta v_i}{\Delta t}$$; missä $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ (pp-koordinaatistossa käytettävä redusoitua massaa)

Δt = tähden i "ohitusaika"

Siirrytään jatkuvasti jakautuneeseen "tähtiväliaineeseen", jossa on n tähteä/tilavuusyksikkö. Tällöin

nv_0 = "törmäävien" tähtien lukumäärä aika- ja pinta-alayksikköä kohden.
= saapuvien " " " " "

Kulmaan $\theta, \ldots \theta + d\theta$ sironneiden tähtien lukumäärä/aikayksikkö on

$$N = nv_0 \cdot \sigma(\theta)\, d\Omega$$ | sironneiden tähtien $1\mathrm{km/cm^2 s}$ = $\sigma(\theta)d\Omega\cdot$saapuvien tähtien $1\mathrm{km/cm^2 s}$

$$N = nv_0 \cdot \sigma(\theta)\, 2\pi \sin\theta\, d\theta$$

Sironnoissa $\Theta, \ldots \Theta + d\Theta$ menetetty liikemäärä alkuperäiseen suuntaan nähden on ajassa dt :

$$\frac{dp(\theta)}{dt} = \mu \, \Delta v \cdot N$$
$$= \mu \, v_0 (1-\cos\Theta) \cdot n v_0 \, \sigma(\Theta) \, 2\pi \sin\Theta \, d\Theta$$

Kaikissa sironnoissa $\Theta_{min} < \Theta < \Theta_{max}$ on menetetty liikemäärä/aikayksikkö eli tarkasteltavaa tähteä jarruttava voima (stellar friction) :

$$F = \int_{\Theta_{min}}^{\Theta_{max}} dp(\Theta) \, d\Theta$$

$$= 2\pi \mu v_0^2 n \int_{\Theta_{min}}^{\Theta_{max}} (1-\cos\Theta)\sigma(\Theta) \sin\Theta \, d\Theta \qquad \Big| \quad \sigma(\Theta) = \frac{s\,ds}{\sin\Theta \, d\Theta}$$

$$= 2\pi \mu v_0^2 n \int_{s_{min}}^{s_{max}} (1-\cos\Theta) \, s\,ds$$

$\Theta = 2(\vartheta_\infty - \vartheta_0) - \pi$

valitaan : $\vartheta_0 = 0°$

$\Theta = 2\vartheta_\infty - \pi$

$- \cos\Theta = \cos 2\vartheta_\infty = \dfrac{1-\tan^2\vartheta_\infty}{1+\tan^2\vartheta_\infty}$

$$= 2\pi \mu v_0^2 n \int_{s_{min}}^{s_{max}} \left(1 + \frac{1-\tan^2\vartheta_\infty}{1+\tan^2\vartheta_\infty}\right) s\,ds$$

$$\doteq 2\pi \mu v_0^2 n \int_{s_{min}}^{s_{max}} \frac{2}{1+\tan^2\vartheta_\infty} \, s\,ds$$

$\tan\vartheta_\infty = \tan(\pi - \vartheta_\infty) = \tan\left[\frac{\pi}{2} - (\vartheta_\infty - \frac{\pi}{2})\right]$

$= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}\right) = \cot\frac{\Theta}{2}$

$= \dfrac{2Es}{MG} = \dfrac{v_0^2 s}{MG}$

Merk. : $\alpha = \dfrac{v_0^2}{MG}$

$\tan\vartheta_\infty = \alpha s$

$$F = 4\pi \mu v_0^2 n \int_{s_{min}}^{s_{max}} \frac{1}{2\alpha^2} \, \frac{2\alpha^2 \cdot s\,ds}{1+\alpha^2 s^2}$$

$$= \frac{2\pi\mu v_0^2 n}{\alpha^2} \Big/_{s_{min}}^{s_{max}} \ln(1+\alpha^2 s^2)$$

Sij. $s_{min} = 0$

$\alpha = \dfrac{v_0^2}{MG}$

$$\boxed{F = \frac{2\pi\mu n M^2 G^2}{v_0^2} \ln\left(1 + \frac{v_0^4 s_{max}^2}{M^2 G^2}\right)}$$

TÄHDEN LIIKETTÄ JARRUTTAVA VOIMA

Tämä kaava on voimassa, kun muitten tähtien nopeudet ovat pieniä. Törmäysparametrin ylärajana on käytetty tähtien keskimääräistä välimatkaa : $s_{max} \approx n^{-1/3}$ (Chandrasekhar & Neumann osoittivat 1942 että tapaukset $s > n^{-1/3}$ eivät merkittävästi vaikuta). Jos halutaan huomioida myös kaukaisten tähtien aiheuttamat gravitaatiofluktuaatiot, olisi s_{max}-arvoksi valittava systeemin koko.

Aikaa, jonka kuluessa tähti saavuttaa tilastollisen nopeustasapainon muitten tähtien kanssa, kutsutaan tähden relaksaatioajaksi τ (hidastumisaika).

$$\tau = \frac{\Delta p}{F} = \frac{\mu v_0 - 0}{F}$$

$$= \frac{v_0^2}{2\pi v_0 n \ln(1+\alpha^2 s_{max}^2)} \qquad \text{sij. } \alpha = \frac{v_0^2}{MG}$$

$$\boxed{\tau = \frac{v_0^3}{2\pi M^2G^2 n \ln\left(1 + \frac{v_0^4}{M^2G^2} s_{max}^2\right)}}$$

TÄHDEN RELAKSAATIOAIKA

Tämän ajan kuluessa on tähti menettänyt alkuperäisen nopeutensa. Relaksaatioajan kuluttua on $\sum(\Delta E)^2 \approx E^2$, missä

ΔE = tähtien kohtaamisessa tapahtuva energian vaihto

E = kineettinen kokonaisenergia alkuhetkellä

ESIM. 1 Auringolle: $v_0 = 20$ km/s $= 2\times10^4$ m/s

$\alpha = (v_0^2/MG) = 3\times10^{-12}$ 1/m

$n = 3.7\times10^{-56}$ cm^{-3} = 0.1 pc^{-3}

Jos $s_{max} = 3$ pc $\approx 10^{17}$m ($\approx$tähtien välimatka), niin $\tau \approx 8\times10^{19}$s $\approx 10^{12}$y.

Jos $s_{max} \approx 10^4$pc $\approx 3\times10^{20}$m, niin $\tau \approx 5\times10^{19}$s $\approx 10^{12}$y.

Todetaan, että s_{max}:n arvo ei merkittävästi vaikuta: tulokset poikkeavat toisistaan noin tekijällä 2. Tärkeä tulos sen sijaan on, että Auringon ympäristössä $\tau >>$ Linnunradan ikä (15×10^9y).

Auringon ympäristössä ovat tähtien kohtaamiset vaikuttaneet sangen vähän. Näin ollen tähdet kiertävät Auringon lähiympäristössä omaa häiriintymätöntä rataansa Linnunradan keskustan ympäri. Sen sijaan kohtaamiset molekyylipilvien kanssa saattavat olla merkityksellisiä.

ESIM. 2 Massiivisen molekyylipilven $M \approx 10^6\ M_\odot$

$n \approx (1.5\text{ kpc})^{-3} = 10^{-59}$ m^{-3}

$s_{max} \approx 3000$ pc $\approx 10^{20}$m

Muut parametrit kuten edellisessä esimerkissä.

$\Longrightarrow \tau \approx 10^{10}$ y ($\approx$ Linnunradan ikä)

ESIM. 3 Tiheimmissä tähtijoukoissa ovat tähtien kohtaamiset merkityksellisiä:

Plejadeilla $\tau \approx 2\times10^7$ y (vrt. Plejadien ikä 6-10 10^7y)

ESIM. 4 Pallomaiselle tähtijoukolle

$\tau \approx 4.5\times10^9$ y (vrt. ikä $\approx 10\text{-}20\times10^9$ y)

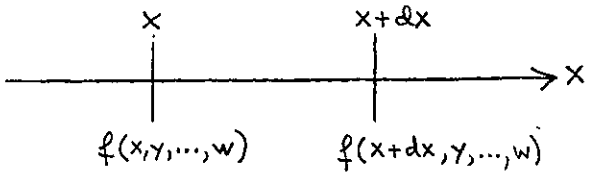
1.4.3 Stellaaridynamiikan perusyhtälö

Johdetaan seuraavassa Boltzmannin yhtälö, joka pätee kaikissa satunnaisissa prosesseissa kuten esimerkiksi kaasumolekyylien, kosmisten hiukkasten ja tähtien liikkeissä. Tarkastellaan tilavuusalkiossa dxdydz (lyhyemmin d^3x) olevia hiukkasia, joitten nopeudet ovat tietyllä nopeusvälillä, jota kuvaa alkio dudvdw (lyhyemmin d^3u). Oletetaan lisäksi, että tässä faasiavaruuden alkiossa $d\gamma = d^3x\, d^3u$ ei synny uusia hiukkasia. Hiukkasten lukumäärä tässä faasiavaruuden alkiossa on

$$dN(t) = f(\bar{r}, \bar{v}, t) \cdot d\gamma$$

$$\Rightarrow f = \frac{dN(t)}{d\gamma} = \frac{dN(t)}{d^3x\, d^3u}$$ = hiukkasten tiheys faasiavaruudessa

Katsotaan miten funktio f muuttuu ajan mukana. Tarkastellaan ensin muutosta yhden koordinaatin suhteen:



x-akselia vasten kohtisuorassa olevien "sivujen pinta-ala" on dydzdudvdw

Ajassa dt on sisääntulevien hiukkasten lukumäärä tässä tapauksessa

$$N_x(\text{sisään}) = \frac{dx}{dt} f(x,y,\dots,w)\, dy\, dz\, du\, dv\, dw\, dt$$

$$= u\, f(x,y,\dots,w)\, dy\, dz\, du\, dv\, dw\, dt$$

Vastaavasti on kohdassa x+dx ulos tulevien hiukkasten lukumäärä :

$$N_x(\text{ulos}) = u\, f(x+dx, y, \ldots, w)\, dy\, dz\, du\, dv\, dw\, dt$$

Faasiavaruuden alkiossa $d\gamma$ on siten hiukkasten lukumäärän muutos ajassa dt :

$$\begin{aligned} dN_x &= u\left[f(x,y,\ldots,w) - f(x+dx,y,\ldots,w)\right] dy\, dz\, du\, dv\, dw\, dt \\ &= u\left[-\frac{\partial f}{\partial x}dx\right] dy\, dz\, du\, dv\, dw\, dt \\ &= -u\frac{\partial f}{\partial x}\, d\gamma\, dt \end{aligned}$$

Vastaava tulos saadaan myös faasiavaruuden alkion muille koordinaateille.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\quad dN_{tot} &= dN_x + dN_y + \ldots + dN_w \\ &= -\left(u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} + \dot{u}\frac{\partial f}{\partial u} + \dot{v}\frac{\partial f}{\partial v} + \dot{w}\frac{\partial f}{\partial w}\right) d\gamma\, dt \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{dN}{d\gamma} = f = -\left(\sum_{i=1}^{3}\dot{\bar{r}}_i \frac{\partial f}{\partial \bar{r}_i} + \sum_{i=1}^{3}\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{r}}_i}\right)dt = \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Vertaamalla tätä lauseketta funktion f kokonaisdifferentiaalilausekkeeseen

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \overbrace{\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \bar{r}_i}\frac{d\bar{r}_i}{dt} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{r}}_i}\frac{d\dot{\bar{r}}_i}{dt}}^{-\frac{\partial f}{\partial t}\ \text{edellisen mukaan}}$$

havaitaan, että

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} + \dot{u}\frac{\partial f}{\partial u} + \dot{v}\frac{\partial f}{\partial v} + \dot{w}\frac{\partial f}{\partial w} = 0}$$

eli

f = vakio

Mikäli uusia hiukkasia ei muodostu, säilyy hiukkasten tiheys faasiavaruudessa vakiona.

<u>HUOM.</u> Edellä on oletettu, että tähtiin vaikuttavat voimat ovat konservatiivisia. Tällöin

$$\dot{u}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

, jolloin yllä oleva yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{=0\ \text{stationaarisessa tapauksessa}} + \sum\left[u_i\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right] = 0$$

Sirottuneet tähdet "diffundoituvat" ulos tarkasteltavasta alkiosta faasiavaruudes:a. Tällöin on edellä esitetyn yhtälön oikealle puolelle lisättävä törmäykset huomiova termi $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left[u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{u}_i \frac{\partial f}{\partial u_i}\right] = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}}$$

BOLTZMANNIN YHTÄLÖ

Sovellettaessa tätä yhtälöä stellaaridynamiikkaan kutsutaan sitä stellaaridynamiikan perusyhtälöksi.

Koska tähtien liike nopeuskoordinaatistossa on törmäysten tapauksessa hyvin epäsäännöllistä, voidaan törmäysterminä käyttää klassisen diffuusioteorian Fokker-Planckin yhtälöä:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = -\sum \frac{\partial(a_i f)}{\partial u_i} + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2(b_i f)}{\partial u_i^2}$$

missä $a_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{[u_i(t) - u_i(t+\Delta t)]}}{\Delta t}$ = dynaamisen kitkan kerroin

$b_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{[u_i(t) - u_i(t+\Delta t)]^2}}{\Delta t}$ = diffuusiokerroin

ESIM. Auringon ympäristössä on tähtien relaksaatioaika huomattavasti suurempi kuin Linnunradan ikä. Tällöin voidaan olettaa, että

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} \approx 0$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f = \text{vakio}$$

Faasiavaruuden hiukkastiheys voidaan ratkaista seuraavasti:

Oletetaan 1) f ei riipu ajasta

2) nopeusjakautuma $\phi(u,v,w)$ ei riipu paikasta ja sen normitus on :

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \phi(u,v,w)\,du\,dv\,dw = 1$$

Tällöin $f(x,y,z,u,v,w) = D(x,y,z) \cdot \phi(u,v,w)$

missä D = tähtitiheys kpl/pc^3

Oletetaan seuraavassa yksinkertaisuuden vuoksi, että kaikilla tähdillä on sama massa m . Tällöin

$$\rho(x,y,z) = m \cdot D(x,y,z)$$

$$D \cdot \phi = f \quad \Big| \iiint_{-\infty}^{\infty} \ldots du\,dv\,dw$$

$$\underbrace{D \iiint_{-\infty}^{\infty} \phi\,du\,dv\,dw}_{=1} = \iiint_{-\infty}^{\infty} f\,du\,dv\,dw$$

$$\rho(x,y,z) = m \iiint_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z,u,v,w)\,du\,dv\,dw$$

Massajakautuma aiheuttaa potentiaalikentän V(x,y,z) , joka toteuttaa Poissonin yhtälön:

$$\boxed{\Delta V = \nabla^2 V = 4\pi G \rho}$$ POISSONIN YHTÄLÖ

$$\Longleftrightarrow \quad V(\bar{r},t) = -G \iiint \frac{\rho(\bar{r}',t)}{|\bar{r} - \bar{r}'|}\,dx'\,dy'\,dz$$

kun reunaehto on:

$V \rightarrow 0$, kun $|r| \rightarrow \infty$

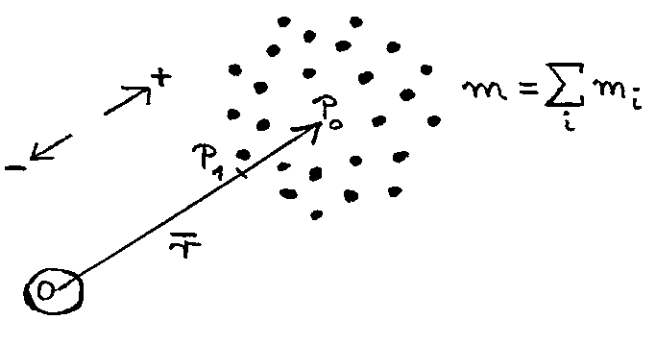
Seuraavilla perusyhtälöillä pyritään ratkaisemaan tähtien jakauma faasiavaruudessa.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Boltzmannin yhtälö} \\ \text{Poissonin yhtälö} \\ \varrho = m\iiint f(x,y,z,u,v,w)\,d^3u\end{array}\right\} \Longrightarrow f(x,y,z,u,v,w)$$

1.5 MASSAJOUKON STABIILISUUS VUOROVESIVOIMAN VAIKUTTAESSA

Gravitaation sitoman massapistesysteemin (esim. tähtijoukko) tullessa liian lähelle massiivista kappaletta M , pyrkii massajoukko hajoamaan. Samoin voi käydä kiinteälle taivaankappaleelle (esim. kuu) , jos se tulee riittävän lähelle suurimassaista kappaletta (esim. planeetta).

1.5.1 Stabiilisuusehto, kun suurimassainen kappale ja massajoukko ovat levossa toisiinsa nähden



Parven säde = $\bar{r}'$

$\overline{OP}_0 = \bar{r}$

$\overline{OP}_1 = \bar{r} - \bar{r}'$

M:n aiheuttama gravitaatiokiihtyvyys pisteessä P_0 : $g_{P_0} = -\dfrac{GM}{r^2}$

M:n aiheuttama gravitaatiokiihtyvyys pisteessä P_1 : $g_{P_1} = -\dfrac{GM}{(r-r')^2}$

$$g_{P_1} - g_{P_0} = -GM\left[\frac{1}{(r-r')^2} - \frac{1}{r^2}\right] = -GM\left[\frac{1}{r^2\left(1 - 2\frac{r'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}\right)} - \frac{1}{r^2}\right]$$

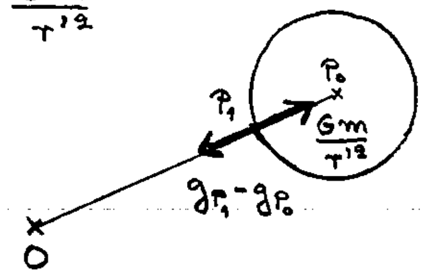
$$= -GM\left[\frac{1}{r^2}\left(1 + 2\frac{r'}{r} + \ldots\right) - \frac{1}{r^2}\right]$$

$$g_{P_1} - g_{P_0} = -GM \cdot 2\frac{r'}{r^3}$$

m:n aiheuttama gravitaatiokiihtyvyys pisteessä $P_1 = \frac{Gm}{r'^2}$

Stabiilisuusehto:

$$\frac{Gm}{r'^2} > \left| g_{P_1} - g_{P_0} \right| = \frac{2GMr'}{r^3}$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{m}{r'^3} > \frac{2M}{r^3}}$$ MASSAJOUKON m STABIILISUUSEHTO

1.5.2 Stabiilisuusehto, kun massajoukko liikkuu ympyräradalla

Napakoordinaatistossa kiihtyvyys = $\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2$ Ympyräradan tapauksessa r = vakio $\Rightarrow \ddot{r} = 0$

Keskeisvoiman kiihtyvyys pisteessä P_0 : $a_{P_0} = -r\dot{\vartheta}^2$

Keskeisvoiman kiihtyvyys pisteessä P_1 : $a_{P_1} = -(r - r')\dot{\vartheta}^2$

M:n aiheuttama gravitaatiokiihtyvyys pisteessä P_0 : $g_{P_0} = -\frac{GM}{r^2}$

M:n aiheuttama gravitaatiokiihtyvyys pisteessä P_1 : $g_{P_1} = -\frac{GM}{(r-r')^2}$

m:n aiheuttama gravitaatiokiihtyvyys pisteessä P_1 $= \frac{Gm}{r'^2}$

Stabiilisuusehto :

$$\frac{Gm}{r'^2} > \left| (g_{P_1} + a_{P_1}) - (g_{P_0} + a_{P_0}) \right|$$

$$\frac{Gm}{r'^2} > \left| a_{P_1} - a_{P_0} \right| + \underbrace{\left| g_{P_1} - g_{P_0} \right|}_{\frac{2GMr'}{r^3}}$$

kts. kohta 1.5.1

$$\left| a_{P_1} - a_{P_0} \right| = \left| -(r-r')\dot{\vartheta}^2 - (-r\dot{\vartheta}^2) \right|$$
$$= \left| r'\dot{\vartheta}^2 \right| = \left| r' \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \frac{1}{r} \right|$$
$$= \left| r' \cdot \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{1}{r} \right|$$

$$\frac{Gm}{r'^2} > \frac{GM}{r^3} \cdot r' + \frac{2GM}{r^3} \cdot r'$$

$$\frac{m}{r'^2} > \frac{3M}{r^3} r'$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{m}{r'^3} > \frac{3M}{r^3}}$$

STABIILISUUSEHTO YMPYRÄLIIKKEESSÄ OLEVALLE MASSAPARVELLE m

ESIM. Ympyrärataa kiertävä tähtijoukko Linnunradan vetovoimakentässä.

Stabiilisuusehto:

$$\frac{Gm}{r'^2} > \left|(g_{P_1} + a_{P_1}) - (g_{P_0} + a_{P_0})\right|$$

$$> \underbrace{\left|a_{P_1} - a_{P_0}\right|}_{r'\dot{\vartheta}^2 = r' \frac{\Theta^2}{r^2}} + \left|g_{P_1} - g_{P_0}\right| = r' \frac{\Theta^2}{r^2} + \frac{dg}{dr} \underbrace{\Delta r}_{r'}$$

$$g(r) = -\frac{\Theta^2(r)}{r}$$

$$\frac{dg(r)}{dr} = -\frac{2\Theta}{r}\frac{d\Theta}{dr} + \frac{\Theta^2}{r^2}$$

$$\frac{Gm}{r'^2} > r' \frac{\Theta^2}{r^2} - r' \frac{2\Theta}{r}\frac{d\Theta}{dr} + r' \frac{\Theta^2}{r^2}$$

$$\frac{Gm}{r'^2} > 2r' \frac{\Theta^2}{r^2} - 2r' \frac{\Theta}{r}\frac{d\Theta}{dr}$$

$$\frac{Gm}{r'^2} > 2r' \underbrace{\frac{\Theta}{r}}_{A-B} \underbrace{\left(\frac{\Theta}{r} - \frac{d\Theta}{dr}\right)}_{2A}$$

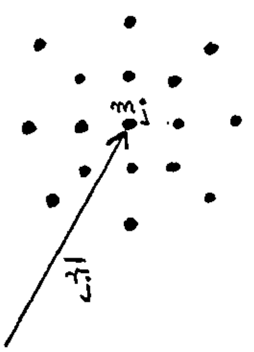
$$\boxed{\frac{Gm}{r'^3} > 4A(A-B)}$$

, missä A ja B ovat Oortin vakioita

1.6 VIRIAALITEOREEMA JA GALAKSIJOUKKOJEN MASSANMÄÄRITYS

1.6.1 Viriaaliteoreema

Johdetaan seuraavassa lauseke äärellisessä tilavuudessa olevien kappaleitten liike-energian aikakeskiarvon ja potentiaalienergian välille



Massapistesyteemissä olkoon massan m_j paikkavektori $\bar{r}_j$ ja liikemäärä $\bar{p}_j = m\dot{\bar{r}}_j$. Massaan m_j vaikuttaa voima $\bar{F}_j = \dot{\bar{p}}_j$.

$$\frac{d}{dt}\sum \bar{p}_j\cdot\bar{r}_j = \sum \dot{\bar{p}}_j\cdot\bar{r}_j + \sum \bar{p}_j\cdot\dot{\bar{r}}_j$$

$$= \sum \bar{F}_j\cdot\bar{r}_j + \sum m\bar{v}_j\cdot\bar{v}_j$$

$$= \sum \bar{F}_j\cdot\bar{r}_j + 2T$$, missä T =koko systeemin liike-energia

Ajallinen keskiarvo:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d}{dt}\sum_j \bar{p}_j\cdot\bar{r}_j\,dt = \left\langle 2T + \sum_j \bar{F}_j\cdot\bar{r}_j\right\rangle$$

$$\frac{1}{\tau}\left[\sum_j \bar{p}_j(\tau)\cdot\bar{r}_j(\tau) - \sum_j \bar{p}_j(0)\cdot\bar{r}_j(0)\right] = 2\langle T\rangle + \left\langle\sum \bar{F}_j\cdot\bar{r}_j\right\rangle$$

Oletetaan sidottu massapistesysteemi, jolloin r_j ja p_j saavat äärellisiä arvoja kaikkina aikoina.

$$\Longrightarrow \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left[\sum \bar{p}_j(\tau)\cdot\bar{r}_j(\tau) - \sum p_j(0)\cdot r_j(0)\right] = 0$$

$$\Rightarrow 2\langle T\rangle + \left\langle \sum \bar{F}_j \cdot \bar{r}_j \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle T\rangle = -\tfrac{1}{2}\left\langle \sum \bar{F}_j \cdot \bar{r}_j \right\rangle} \quad \text{VIRIAALILAUSE}$$

Jos voima on johdettavissa potentiaalista V_j (ts. $\bar{F} = -\nabla V(r_j)$), saadaan

$$\langle T\rangle = -\tfrac{1}{2}\left\langle \sum -\nabla V(r_j)\cdot \bar{r}_j \right\rangle = \tfrac{1}{2}\left\langle \sum \nabla V(r_j)\cdot \bar{r}_j \right\rangle$$

Olet. keskeisvoimakenttä: $V(r_j) = C\, r_j^{\,n}$

$$\nabla V(r_j) = C \frac{\partial}{\partial r_j} r_j^{\,n} \cdot \bar{r}^{\,0} = C\, n\, r_j^{\,n-1} \cdot \frac{\bar{r}_j}{r_j}$$

$$\Rightarrow \nabla V(r_j)\cdot \bar{r}_j = \sum n\, C\, r_j^{\,n} \cdot \frac{1}{r_j}\left(\frac{\bar{r}_j}{r_j}\cdot \bar{r}_j\right)$$

$$= n \sum C\, r_j^{\,n}$$

$$= n \sum V(r_j)$$

$$= n \underbrace{V}_{\text{koko systeemin potentiaalienergia}}$$

$$\Rightarrow \langle T\rangle = \frac{n}{2}\langle V\rangle$$

Gravitaatiopotentiaalin $V = C\cdot(1/r)$ tapauksessa eksponentti $n=-1$

$$\Rightarrow \boxed{\langle T\rangle = -\tfrac{1}{2}\langle V\rangle} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{2\langle T\rangle + \langle V\rangle = 0}$$

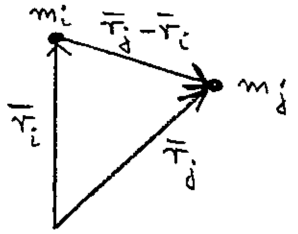
<u>HUOM.</u> Tämä viriaaliteoreeman muoto on saatu olettamalla, että massapisteet ovat <u>ulkoisessa $(1/r^2)$-vetovoimakentässä</u> (esim. pikkuplaneetat Auringon vetovoimakentässä). Todettakoon, että massojen m_j väliset vetovoimat on tässä jätetty huomioimatta.

Oletetaan seuraavassa, että ulkoinen vetovoimakenttä puuttuu, ja tarkastellaan yksinomaan massapisteiden välisiä gravitaatiovoimia. Tällöin

$$\sum_j \bar{F}_j \cdot \bar{r}_j = \sum_j \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \bar{F}_{ji} \cdot \bar{r}_j$$

, missä $\bar{F}_{ji}$ = tähteen j vaikuttava tähden i aiheuttama vetovoima

$$= \sum_j \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \left[- \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} (\bar{r}_j - \bar{r}_i) \cdot \bar{r}_j \right]$$



Kahden massapisteen (esim m_k ja m_l) väliset termit:

$$- \frac{G m_k m_l}{r_{kl}^3} \left[(\bar{r}_k - \bar{r}_l) \cdot \bar{r}_k + (\bar{r}_l - \bar{r}_k) \bar{r}_l \right]$$

$$= - \frac{G m_k m_l}{r_{kl}^3} \underbrace{(\bar{r}_k - \bar{r}_l)(\bar{r}_k - \bar{r}_l)}_{|\bar{r}_k - \bar{r}_l|^2 = r_{kl}^2}$$

$$= - \frac{G m_k m_l}{r_{kl}}$$

$$\Rightarrow \sum \bar{F}_j \cdot \bar{r}_j = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} - \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} (\bar{r}_j - \bar{r}_i) \cdot \bar{r}_j = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} - \frac{G m_i m_j}{r_{ij}}$$

$$= V$$

sij.

Viriaalilause:

$$\langle T \rangle = - \frac{1}{2} \langle \sum \bar{F}_j \cdot \bar{r}_j \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle T \rangle = - \frac{1}{2} \langle V \rangle}$$

Systeemin kokonaisenergia keskeisvoimakentässä:

$$\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$$

$$\langle E \rangle = \langle T \rangle - 2 \langle T \rangle$$

$$\boxed{\langle E \rangle = - \langle T \rangle}$$ SYSTEEMIN SIDOSENERGIA

HUOM. Vain koossa pysyvissä systeemeissä, joissa siis $E < 0$, pätee viriaalilause. Mitä negatiivisempi kokonaisenergia on (ts. mitä suurempi sidosenergia), sitä paremmin pätevät viriaalilauseen oletukset.

1.6.2 Galaksijoukon massanmääritys

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että joukon kaikilla galakseilla on sama massa, jolloin joukon kokonaismassa $M = \sum m$. Tällöin

$$2\langle T\rangle = \sum_j \langle m_j v_j^2\rangle = n\cdot m\langle \overline{v^2}\rangle$$, missä $\overline{v^2} = \frac{1}{n}\sum_j v_j^2$

$\langle\ \rangle$ = ajallinen keskiarvo

ja

$$\langle V\rangle = \left\langle \sum - \frac{G m_j m_i}{r_{ij}} \right\rangle$$

$$= -Gm^2\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle \cdot \underbrace{\sum \text{kaikki parit n:stä kohteesta}}_{\frac{n(n-1)}{2}}$$

1. komponentti voidaan valita n:llä tavalla, 2. komponentti (n-1):llä Tällöin jokainen kohde lask. 2 kertaa mukaan $\Longrightarrow$ tulos jaettava kahdella.

$$\langle V\rangle = -\frac{n(n-1)}{2} G m^2 \left\langle \frac{1}{r}\right\rangle$$

Viriaaliteoreema: $2\langle T\rangle + \langle V\rangle = 0$

$$2\langle T\rangle = -\langle V\rangle$$

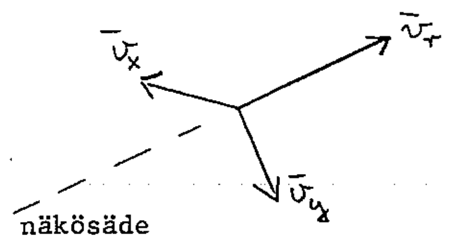
$$\Rightarrow nm\langle \overline{v^2}\rangle = \frac{n(n-1)}{2} G m^2 \left\langle \frac{1}{r}\right\rangle$$ | Kun $n \gg 1$ $\quad n(n-1) \approx n^2$

$$\Rightarrow nm\langle \overline{v^2}\rangle = \frac{G}{2}(nm)^2 \left\langle \frac{1}{r}\right\rangle$$ | $M = nm$

$$\boxed{M = \frac{2\langle \overline{v^2}\rangle}{G\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle}}$$

Havainnoista saadaan kunkin galaksin säteisnopeus v_{rj}, jossa on mukana systeemin painopisteen säteisnopeus $v_{r_o} = v_{r_j}$. Galaksien säteisnopeudet joukon painopisteen suhteen ovat:

$$v^2 = (v_{r_j} - v_{r_o})^2 + (v_{x_j} - v_{x_o})^2 + (v_{y_j} - v_{y_o})^2$$



Oletetaan, että nopeusjakauma on isotrooppinen, jolloin

$$\overline{(v_{r_j} - v_{r_o})^2} = \overline{(v_{x_j} - v_{x_o})^2} = \overline{(v_{y_j} - v_{y_o})^2} = \frac{1}{3}\,\overline{v^2}$$

Mikäli galaksijoukko on stationaarinen, pätee :

$$\langle \overline{v^2} \rangle = \overline{v^2} = 3\,\overline{(v_{r_j} - v_{r_o})^2}$$

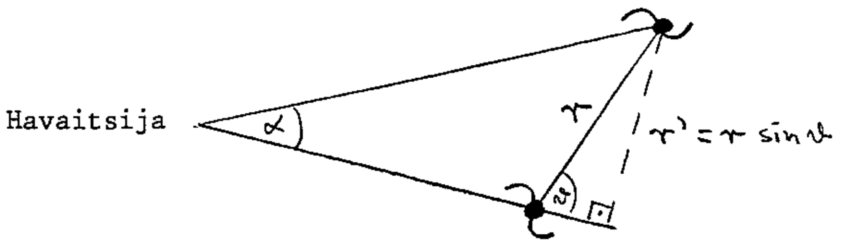
Karkeasti arvioituna on:

$$\langle \overline{\tfrac{1}{r}} \rangle = \overline{\left(\tfrac{1}{r}\right)}$$

Havainnoista voidaan arvioida galaksien keskimääräinen välimatka r parhaiten mittaamalla kaikki välimatkat r_{ij}

$$r = \frac{1}{N} \sum r_{ij}$$

On kuitenkin huomioitava, että valokuvauslevyltä mitatut välit r_{ij} ovat taivaalle projisioituja välimatkoja. Vain harvoin on galaksien yhdysjana kohtisuorasti näkösädettä vasten. Useinmiten todellinen välimatka on suurempi:



Kuviosta: r sin ϑ = r' = valokuvasta mitattu projisioitu etäisyys

$$\Longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} \sin\vartheta$$

$$\overline{\left(\frac{1}{r}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{r'}\right)}\,\overline{\sin\vartheta}$$

$$= \overline{\left(\frac{1}{r'}\right)} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \, d\vartheta}{\int_0^{\pi/2} d\vartheta} = \overline{\left(\frac{1}{r'}\right)} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \overline{\left(\frac{1}{r'}\right)}$$

Galaksijoukon massaksi saadaan täten

$$M = \frac{2\langle v^2\rangle}{G\langle\frac{1}{r}\rangle} = \frac{2\cdot 3\,\overline{(v_{r_j} - v_{r_o})^2}}{G\cdot\frac{2}{\pi}\overline{\left(\frac{1}{r'}\right)}}$$

$$\boxed{M = \frac{3\pi\,\overline{(v_{r_j} - v_{r_o})^2}}{G\,\overline{\left(\frac{1}{r'}\right)}}}$$

, missä r'= valokuvasta mitattu projisioitu etäisyys

v_{r_o} = galaksijoukon painopisteen säteisnopeus

v_{r_j} = galaksin j säteisnopeus

Viriaaliteoreeman mukaan laskettu galaksijoukon kokonaismassa on noin 10 kertaa suurempi kuin joukon yksittäisten galaksien massa-arvioiden summa. Tätä ristiriitaista tulosta kutsutaan "missing mass"-probleemaksi.

Alla on lueteltu muutamia ratkaisuehdotuksia :

- Galaksijoukossa on näkymätöntä massaa (esim. tiiliskiven kokoisia kappaleita ei pystytä havaitsemaan).
- Mikäli neutriinon (tai jonkin muun massattoman alkeishiukkasen) lepomassa onkin nollasta poikkeava, saattaa galaksijoukkoon kuulua paikallinen neutriinotihentymä.
- Mikäli galaksijoukko hajaantuu, ei viriaaliteoreemaa voida soveltaa!

2. TÄHTIEN ATMOSFÄÄRIT

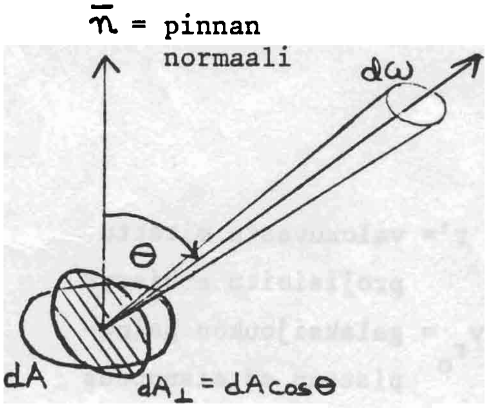
2.1 SÄTEILYN EMISSIO JA ABSORPTIO

Lähes kaikki taivaankappaleista saatava tieto tulee säteilyn välityksellä. Siksi astrofysiikan kannalta tärkein materian ominaisuus on, että se absorboi ja emittoi säteilyä.

2.1.1 Säteilyn perusmääritelmiä

a) Säteilyn intensiteetti I_ν (Specific Intensity)

Tarkastellaan pinta-alkion dA läpi menevää säteilyenergiaa. Pinta-alkio voi olla "tyhjässä" avaruudessa tai taivaankappaleen pinnan osa. Pinta-alkion läpäissyt säteilyenergian määrä dE_ν on verrannollinen säteilyn taajuuskaistaan $(\nu, \nu + d\nu)$, avaruuskulma-alkioon $d\omega$, tarkastelusuuntaa (θ, ϕ) vasten kohtisuorasti olevaan pinta-alkioon $dA_\perp$ sekä tarkasteluajan pituuteen dt



$\bar{n}'$ = tarkastelusuunta (θ,ϕ)

$$dE_\nu(\theta,\phi) \sim d\nu\, d\omega\, dA_\perp\, dt$$

$$dE_\nu(\theta,\phi) = I_\nu(\theta,\phi)\, d\nu\, d\omega\, dA_\perp\, dt$$

Säteilyenergian lausekkeessa esiintyvälle verrannollisuuskertoimelle I_ν saadaan täten seuraava määritelmä.

MÄÄR. Säteilyn intensiteetti I_ν tarkastelusuunnassa (θ,ϕ) on (θ,ϕ)-keskisessä avaruuskulma-alkiossa $d\omega$ oleva säteilyteho taajuusyksikköä ja pinta-alayksikköä ($dA \perp$ säteilyn suunta) kohti.

$$\boxed{I_\nu(\theta,\phi) = \frac{dE_\nu}{dt\, dA_\perp\, d\nu\, d\omega} = \frac{P_\nu}{\cos\theta\, dA\, d\nu\, d\omega}}$$

MONOKROMAATTISEN SÄTEILYN INTENSITEETTI

$$[I_\nu] = \frac{erg}{s\cdot cm^2\cdot Hz\cdot sr}\; ; \quad \frac{W}{m^2\cdot Hz\cdot sr}$$

(huom. sr = steradiaani)

Säteilyn intensiteetti I_ν riippuu tarkastelupisteen paikasta (x,y,z) tähden atmosfäärissä sekä säteilyn suunnasta (säteilyn ei nimittäin tarvitse olla isotrooppista:

$$I_\nu = I_\nu(x,y,z,\theta,\phi)$$

Pallosymmetrisissä geometrioissa riittää argumenteiksi kulma θ sekä tarkastelupisteen syvyys x tähden atmosfäärissä (tähden pinnalla x = 0).

$$I_\nu = I_\nu(x,\theta)$$

Säteilyn <u>kokonaisintensiteetti</u> <u>suunnassa θ</u> saadaan integroimalla I_ν yli kaikkien taajuuksien:

$$\boxed{I = \int_0^\infty I_\nu\, d\nu}$$

KOKONAISINTENSITEETTI

<u>HUOM.</u> Mikäli intensiteetti I_ν halutaan ilmoittaa aallonpituusväliä $d\lambda$ kohden, on differentioitava yhtälö

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \implies d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\, d\lambda$$

sekä huomioitava, että kummassakin tapauksessa on säteilyn kokonaisintensiteetti oltava sama:

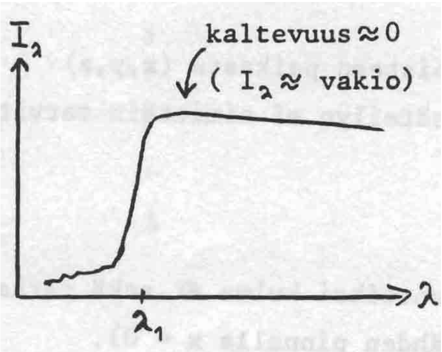
$$I = \int_0^\infty I_\nu\, d\nu = \int_0^\infty I_\lambda\, d\lambda$$

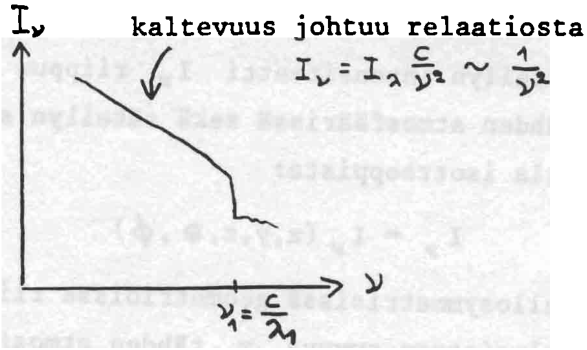
$$I_\lambda = I_\nu \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right|$$

$$\boxed{I_\lambda = I_\nu \frac{c}{\lambda^2}}$$

Vastaavasti $\boxed{I_\nu = I_\lambda \frac{c}{\nu^2}}$

Tämän johdosta saman kohteen (esim. galaksin) I_λ - ja I_ν -spektrit poikkeavat toisistaan:



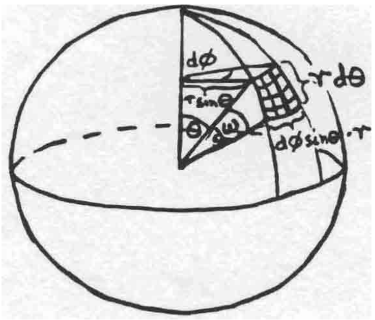


Säteilyn <u>keskimääräinen intensiteetti J_ν</u> määritellään intensiteetin keskiarvona yli kaikkien suuntien:

$$\boxed{J_\nu(x) = \frac{\oint I_\nu(\theta,\phi)\,d\omega}{\oint d\omega} = \frac{1}{4\pi}\oint I_\nu(\theta,\phi)\,d\omega}$$

MONOKROMAATTISEN SÄTEILYN
KESKIMÄÄRÄINEN INTENSITEETTI

<u>HUOM</u>. Avaruuskulma ω määritellään seuraavasti. Kun yksikkösäteiseen palloon sijoitetaan kartio siten, että kartion kärki (jonka kulma $= \omega$) on pallon keskipisteessä, leikkaa kartio pallosta alueen, jonka pinta-ala $= \omega$. Jos pallon säde on mielivaltainen säde r, pätee



$$\frac{d\omega}{4\pi} = \frac{dA}{4\pi r^2} \Longrightarrow d\omega = \frac{dA}{r^2}$$

$$d\omega = \frac{(r\,d\theta)(r\sin\theta\,d\phi)}{r^2}$$

$$d\omega = \sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

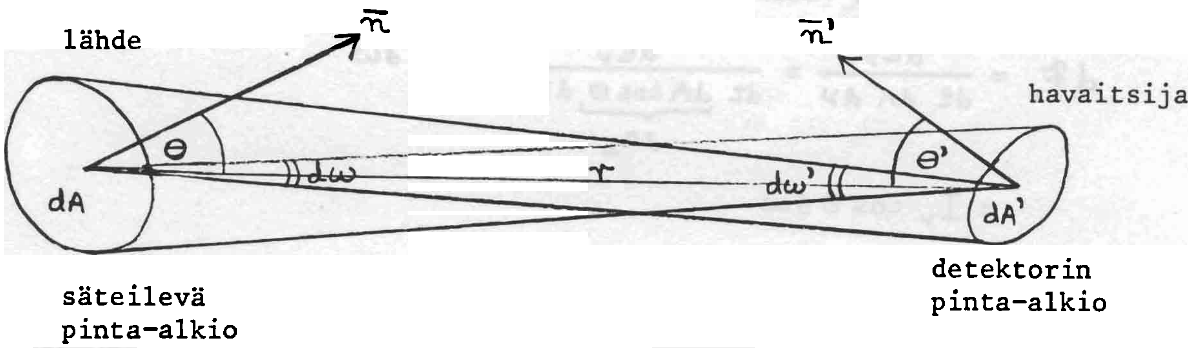
Näin ollen keskimääräinen säteilyintensiteetti voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boxed{J_\nu(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} I_\nu(\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\phi}$$

b) Pintakirkkaus ja säteilyn intensiteetti

Havaittaessa pintamaista kohdetta (esim. Aurinkoa, kaasusumua, galaksia, taustasäteilyä) puhutaan pintakirkkaudesta, joka mitataan yksiköissä $Wm^{-2}HZ^{-1}sr^{-1}$ (radioastronomiassa) tai erg s^{-1} cm^{-2} $Å^{-1}$ sr^{-1} (optisessa astronomiassa) tai 10^m tähteä/$\square^o$ ($\equiv S_{10}$) (taustataivaan fotometriassa).

Kun tarkastellaan lähteen pinnasta ulos tulevaa säteilyä, puhutaan säteilyn intensiteetistä. Merkitään seuraavassa kohteen säteilemää intensiteettiä $I(\Theta, \phi)$ ja havaitsijan rekisteröimää pintakirkkautta $I'(\Theta, \phi)$. Seuraavassa osoitetaan, että I = I'



Lähteen pinta-alkion emittoima teho: $dE_\nu/dt = I_\nu \cos\Theta \, dA \, d\nu \, d\omega$

Havaitsijan rekisteröimä pintakirkkaus:

$$I'_\nu = \frac{dE_\nu/dt}{\cos\Theta' \, dA' \, d\nu \, d\omega'} = \frac{I_\nu \cos\Theta \, dA \, d\nu \, d\omega}{\cos\Theta' \, dA' \, d\nu \, d\omega'}$$

$$d\omega = \frac{\cos\Theta' \, dA'}{r^2}$$

$$d\omega' = \frac{\cos\Theta \, dA}{r^2}$$

$$I'_\nu = I_\nu \frac{\cos\Theta \, dA \, \frac{\cos\Theta' \, dA'}{r^2}}{\cos\Theta' \, dA' \, \frac{\cos\Theta \, dA}{r^2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{I'_\nu = I_\nu}$$

Voidaan todeta, että havaittu pintakirkkaus on sama kuin lähteen säteilyintensiteetti sekä riippumaton havaitsijan ja lähteen välisestä etäisyydestä (niin kauan kuin absorptiota ei esiinny).

ESIM. Jos Auringon etäisyys olisi puolet nykyisestä olisi pintakirkkaus edelleen sama

$I' = I$

Pinta-alkion dA läpi mennyt säteilyteho sen sijaan kasvaisi nelinkertaiseksi ($d\omega \sim \frac{1}{r^2}$).

c) Säteilyvuon tiheys $\mathcal{F}_\nu$ (Flux density)

Tarkastellaan kaikista suunnista pinnan dA läpi menevää säteilytehoa, jonka taajuus on välissä (ν, $\nu + d\nu$).

$$d\mathcal{F}_\nu = \frac{dE_\nu}{dt\, dA\, d\nu} = \frac{dE_\nu}{dt\, \underbrace{dA \cos\theta}_{dA_\perp} d\nu\, d\omega} \cos\theta\, d\omega$$

$$= I_\nu \cos\theta\, d\omega$$

$$\boxed{\mathcal{F}_\nu(x) = \int_\Omega I_\nu \cos\theta\, d\omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_\nu \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\phi}$$

MONOKROMAATTISEN SÄTEILYVUON TIHEYS (pintatiheys)

$$[\mathcal{F}_\nu] = \frac{erg}{s \cdot cm^2\, Hz} \quad ; \quad \frac{W}{m^2\, Hz}$$

Säteilyn kokonaisvuon tiheys saadaan integroimalla yli kaikkien taajuuksien:

$$\boxed{\mathcal{F}(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu(x)\, d\nu}$$

KOKONAISVUON TIHEYS

HUOM. 1 Optisessa astronomiassa kutsutaan säteilyvuon tiheyttä usein lyhyesti vain säteilyvuoksi (flux).

HUOM. 2 Radioastronomiassa merkitään muodollisesti säteilyvuon tiheyttä symbolilla S_ν ja lähteen pintakirkkausjakautumaa symbolilla $b_\nu(\alpha, \delta)$, missä α = rektaskensio ja δ = deklinaatio.

Optisessa astronomiassa	Radioastronomiassa
$d\mathcal{F}_\nu = \frac{P_\nu}{dA\,d\nu} = I_\nu \cos\theta\, d\omega$	$dS_\nu = \frac{P_\nu}{dA\,d\nu} = B_\nu(\alpha,\delta)\cdot \underbrace{d\omega}_{\cos\delta\, d\delta\, d\alpha}$ $(\cos\theta = 1)$
$\mathcal{F}_{\nu,out} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_\nu \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\phi$	$S_\nu = \iint B_\nu(\alpha,\delta)\, d\omega$
säteilyteho: $P = \iiint_{\omega A \nu} I \cos\theta\, d\omega\, dA\, d\nu$	$P = \frac{1}{2} A_0 \Delta\nu \int B_\nu(\alpha,\delta)\cdot f(\alpha-\alpha',\delta-\delta')\, d\omega$
	missä A_0 = antennin efektiivinen pinta-ala $\Delta\nu$ = vastaanottimen kaistaleveys f = antennin keilakuvio, joka kuvaa miten tehokkaasti antenni vastaanottaa radiosäteilyä eri suunnissa. Normalisointi: $f(\theta = 0) = 1$

Tekijä ½ johtuu siitä, että radioteleskoopilla saadaan vain toinen polarisaatiosuunta havaittua

Yhdistettäessä antenni kohinaputkeen, antaa kohinaputki tietyssä lämpötilassa T saman tehon kuin havaittu radiolähde:

$P_{lähde} = P_{kohinaputki} = k\cdot\Delta\nu\cdot T$, missä k = Boltzmannin vakio

Kun yo. ehto on täytetty, kutsutaan kohinaputken lämpötilaa <u>antennilämpötilaksi T_A</u>.

$$P_{lähde} = \frac{1}{2} A_0\, \Delta\nu \int B_\nu(\alpha,\delta)\cdot f(\alpha-\alpha',\delta-\delta')\cos\delta\, d\delta\, d\alpha = k\cdot\Delta\nu\cdot T_A$$

Mittaamalla radiolähteen teho saadaan dekonvoluutiolla lähteen pintakirkkaus määritettyä.

Erotetaan seuraavassa tarkastelupinnasta ulos tuleva säteilyvuo ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) pinnan sisään menevästä säteilyvuosta ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \cos\theta < 0$). Tällöin on

$$\mathcal{F}_{out} = \mathcal{F}^+(x) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} I\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$\mathcal{F}_{in} = \mathcal{F}^-(x) = -\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi} I\underbrace{\cos\theta}_{<0}\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$ (huom. miinus-merkki, jotta saataisiin positiivinen tulos)

Nettosäteilyvuon tiheys on täten

$$\mathcal{F}_\nu(x) = \mathcal{F}_\nu^+(x) - \mathcal{F}_\nu^-(x)$$

ESIM.1 Isotrooppisessa säteilykentässä intensiteetti ei riipu kulmasta: $I(x,\theta,\phi) = I(x)$. Tällöin

$$\mathcal{F}_{out}(x) = I(x)\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= I(x)\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\frac{d(2\theta)}{2} = I(x)\cdot\frac{\pi}{2}\Big/_0^{\pi} -\cos 2\theta$$

$$\mathcal{F}_{out}(x) = \pi\cdot I(x)$$

HUOM. Isotrooppisessa säteilykentässä on kokonaisvuon tiheys $\mathcal{F} = 0$:

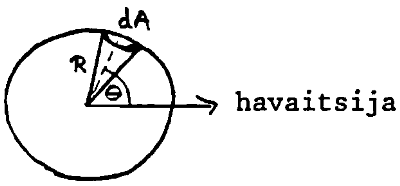
$$\mathcal{F}_{in} = \mathcal{F}_{out} \Longrightarrow \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_{out}(x) - \mathcal{F}_{in}(x) = 0$$

Kun oletetaan, että tähden ulkopuolella ei ole säteilylähteitä, on tähden pinnalla $\mathcal{F}_{in} = 0 \Rightarrow \mathcal{F}(\text{pinnalla}) = \mathcal{F}_{out}$. Tällöin

$$\frac{\mathcal{F}_\nu}{\pi} = \frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} I_\nu\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\phi}{\underbrace{\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\phi}_{\pi}} = \overline{I}_{out}$$

Toisaalta on tähtikiekon yli havaittu keskimääräinen intensiteetti

$$\overline{I}_{out} = \frac{\int I_\nu\,dA}{A}$$, missä $dA = R^2 d\omega$, $dA_\perp = \cos\theta\,dA$

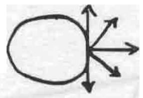


$$= \frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} I_\nu\cos\theta\cdot R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi}{\pi R^2}$$

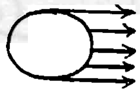
$$\overline{I}_{out} = \frac{\mathcal{F}_{out}}{\pi} = \frac{\mathcal{F}_\nu}{\pi}$$

Koska molemmat tarkastelut antoivat saman lopputuloksen, voidaan tulos tulkita seuraavasti : <u>tähden pinnalla</u> esittää

$J_\nu = \bar{I}_\nu = \frac{\mathcal{F}_\nu}{\pi}$ keskimääräistä säteilyn intensiteettiä



a) <u>yhdestä</u> pisteestä <u>kaikkiin suuntiin</u>



b) <u>kaikista</u> pisteistä <u>yhteen suuntaan</u>

<u>ESIM. 2</u> Auringon kokonaisvuon tiheys Maan ilmakehän ulkopuolella (ns. aurinkovakio) on 1.39×10^{6} erg $s^{-1}cm^{-2}$. Määritä Auringon säteilyintensiteetti sekä kokonaisvuon tiheys Auringon pinnalla, kun oletetaan, että säteilyn intensiteetti on suunnasta riippumaton.

$$\mathcal{F}'_\odot = 1.39\times10^{3}\ \mathrm{W/m^2}$$

$$\omega'_\odot = \frac{\pi R^2}{r^2} = \pi\left[\underbrace{\text{trigon. parallaksi}}_{16'\ \text{Auringolle}}\right]^2 = 6.8\times10^{-5}\ \mathrm{sr}$$

Havaittu pintakirkkaus $I' = \frac{\mathcal{F}'_\odot}{\omega'_\odot}$

$$I' = 1.998\ 10^{7}\ \mathrm{W/m^2sr}$$

Säteilyn kokonaisintensiteetti Auringon pinnalla on siten

$$I = I' \approx 2.0\times10^{7}\ \mathrm{W/m^2sr}$$

Kokonaisvuon tiheys Auringon pinnalla:

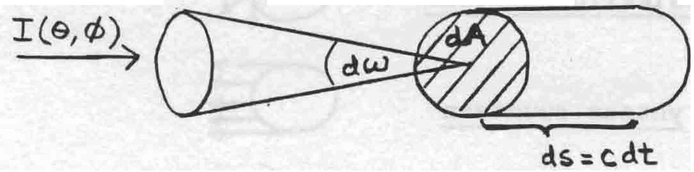
$$\mathcal{F}_\odot = \pi\cdot I$$

$$\mathcal{F}_\odot = 6.28\times10^{7}\ \mathrm{W/m^2} = 62.8\ \mathrm{MW/m^2}$$

Auringon energian tuotto on siten melko tehokasta : 10 m^2 alue Auringon pinnalla säteilee 628 MW (vrt. Loviisan ydinvoimalat I ja II tuottavat kumpikin noin 300 MW).

d) Säteilytiheys u (Radiation Density or Energy Density)

Säteilytiheys u on se säteilyenergian määrä tilavuusyksikköä kohti, joka mielivaltaisena hetkenä kulkee avaruudessa tarkastelupisteen tilavuusalkion läpi.



$$du = \frac{\text{säteilyenergia}}{\text{tilavuusalkio}}$$

$$du = \frac{dE}{dV} = \frac{P \cdot dt}{dA \cdot ds}$$, missä teho $P = I \underbrace{\cos\theta}_{=1} dA\, d\omega$

$$du(\theta,\phi) = \frac{I(\theta,\phi)\cdot dA\, d\omega\, dt}{dA \cdot c\, dt} = \frac{1}{c} I(\theta,\phi)\, d\omega$$

$$u = \int_\Omega du$$

$$\boxed{u = \frac{1}{c}\int_\Omega I(\theta,\phi)\, d\omega}$$ SÄTEILYTIHEYS (avaruustiheys)

$$[u] = \frac{erg}{cm^3} \text{ tai } \frac{J}{m^3}$$

e) Säteilypaine P_R (Radiation pressure)

$$\text{paine} = \frac{\text{pintaa vasten kohtisuora voima}}{\text{pinta-ala}}$$

$$dP_R = \frac{dp_z/dt}{dA} = \frac{dp\cos\theta}{dt\, dA}$$

missä fotonin liikemäärä $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c}$

$$dp = \frac{dE}{c} = \frac{I\cos\theta\, d\omega\, dA\, dt}{c}$$

$$dP_R = \frac{1}{c} I \cos^2\theta\, d\omega$$

$$\boxed{P_R = \frac{1}{c}\int_\Omega I \cdot \cos^2\theta\, d\omega}$$ SÄTEILYPAINE

Mikäli tarkastelukohteessa säteily absorboituu ja emittoituu sataprosenttisesti (ts. kyseessä on ns. musta kappale), on kohteessa vallitseva paine $P = P_R$.

ESIM. 1. Määritä säteilypaine täysin mustalle pinnalle, kun säteily tulee kohtisuorasti pintaa vasten.

$$P_R = \frac{1}{c} \int I \cos^2\theta \, d\omega \qquad \Bigg| \begin{array}{l} \theta = 0^\circ \\ \cos\theta = 1 \end{array}$$

$$P_R = \frac{1}{c} \int_\Omega I \, d\omega$$

$$\underline{\underline{P_R = u}}$$

ESIM. 2. Määritä säteilypaine täysin heijastavalle pinnalle isotrooppisessa säteilykentässä ($I(\theta, \phi) = I$)

$$P_R = \frac{I}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \underbrace{\sin\theta \, d\theta \, d\phi}_{d\omega}$$

$$= \frac{2\pi I}{c} \Big/_0^\pi - \frac{1}{3}\cos^3\theta = \frac{2\pi}{3c} I \left[-(-1)^3 + 1\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3c} I$$

Verrattaessa tätä säteilytiheyteen $u = \frac{4\pi}{c} I$ havaitaan, että

$$\underline{\underline{P_R = \frac{u}{3}}}$$

Määritellään lopuksi vielä pari funktiota, joita tullaan käyttämään säteilynkuljetusluvussa (Eddingtonin käyttämät merkinnät)

$$H_\nu(x) = \frac{\int_\Omega I_\nu(\theta)\cos\theta\, d\omega}{\int_\Omega d\omega} = \frac{1}{4\pi}\mathcal{F}_\nu$$

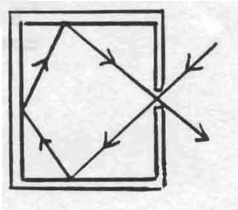
$$K_\nu(x) = \frac{\int_\Omega I_\nu(\theta)\cos^2\theta\, d\omega}{\int_\Omega d\omega} = \frac{c}{4\pi}P_R$$

Näitten hieman keinotekoisten suureitten avulla saadaan säteilyintensiteetille "matemaattisesti kauniita" $\cos\theta$ —momentteja:

$$\boxed{\begin{aligned} J_\nu &= \frac{1}{4\pi}\int I_\nu(\theta)\, d\omega \\ H_\nu &= \frac{1}{4\pi}\int I_\nu(\theta)\cdot\cos\theta\, d\omega = \frac{1}{4\pi}\mathcal{F}_\nu \\ K_\nu &= \frac{1}{4\pi}\int I_\nu(\theta)\cdot\cos^2\theta\, d\omega = \frac{c}{4\pi}P_R \end{aligned}}$$

2.1.2. Mustan kappaleen säteily

Musta kappale määritellään kappaleeksi, joka absorboi (ja vastaavasti myös emittoi) kaiken siihen osuvan säteilyn.



Esimerkiksi säteily, joka tulee ulos pienen aukon omaavasta mustasta laatikosta vastaa melko hyvin mustan kappaleen säteilyä.

a) Planckin säteilylaki

Max Planck havaitsi v. 1900, että mustan kappaleen säteilyintensiteetti riippuu yksinomaan säteilyn taajuudesta ja lämpötilasta ($T=T_{bb}$) :

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$$

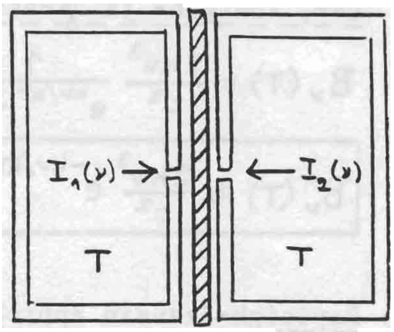
PLANCKIN LAKI (v. 1900)
(mustan kpl:een säteily-intensiteetti

Planckin vakio $h = 6.626 \cdot 10^{-27}$ erg·s $= 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js
Boltzmannin vakio $k = 1.380 \cdot 10^{-16}$ erg/K $= 1.380 \cdot 10^{-23}$ J/K

$$[B_\nu] = \frac{\mathrm{erg \cdot s \cdot s^2}}{\mathrm{s^3 \cdot cm^2}} \cdot \frac{1}{\mathrm{s \cdot \frac{1}{s} \cdot sr}} = \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{s \cdot cm^2 \cdot Hz \cdot sr}} \quad \text{tai} \quad \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot Hz \cdot sr}}$$

HUOM. 1. Kaiken säteilyn absorboivan ja emittoivan kappaleen säteilyintensiteettiä merkitään omalla symbolilla B_ν (B kuten brightness tai black body), jotta se heti erottuisi ei-termisistä säteilyintensiteettilausekkeista.

2. Mustan kappaleen säteily ei riipu kappaleen materiaalista. Jos esimerkiksi kahden eri materiaalista tehdyn mustan kappaleen väliin pannaan suodatin, joka läpäisee vain taajuuden ν sekä oletetaan, että kappaleiden säteilyintensiteetit ovat erisuuret, mutta lämpötila sama, niin



taajuus-suodatin

$I_1(\nu) > I_2(\nu)$ $\Longrightarrow$ energia siirtyisi kappaleesta 1 kappaleeseen 2 vaikka kappaleilla on sama lämpötila

$\Longrightarrow$ ristiriita termodynamiikan II pääsäännön kanssa

Ts. musta kappale säteilee samassa lämpötilassa aina samalla intensiteetillä riippumatta kappaleen koostumuksesta.

Johdetaan seuraavassa Planckin laki aallonpituusyksiköissä. Kokonaisintensiteetti oltava sama kummassakin tapauksessa:

$$I = \int_0^\infty B_\nu \, d\nu = \int_0^\infty B_\lambda \, d\lambda$$

$$\Rightarrow B_\nu(T)\,|d\nu| = B_\lambda(T)\,|d\lambda|$$

$$B_\lambda(T) = B_\nu(T)\left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| \qquad \Big|\ \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| = \frac{c}{\lambda^2}$$

$$B_\lambda(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}\cdot\frac{c}{\lambda^2} = \frac{2hc^3}{c^2\lambda^3}\cdot\frac{c}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

$$\boxed{B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}}$$

HUOM. $B_\lambda \neq B_\nu$

Tarkasteltaessa mustan kappaleen lähettämää suurtaajuista tai hyvin pienitaajuista säteilyä voidaan Planckin lakia approksimoida seuraavasti.

1) Wienin approksimaatio, kun $h\nu/kT \gg 1$

UV-, röntgen- ja γ-säteilyn tapauksessa

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{e^{h\nu/kT} - \cancel{1}}$$

$$\boxed{B_\nu(T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2}\, e^{-h\nu/kT}}$$

2) Rayleigh-Jeansin approksimaatio, kun $h\nu/kT \ll 1$

$$e^{h\nu/kT} - 1 \approx \left(1 + \frac{h\nu}{kT} + \ldots\right) - 1 = \frac{h\nu}{kT}, \text{ joten}$$

$$B_\nu(T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2}\cdot\frac{kT}{h\nu} = \frac{2\nu^2 kT}{c^2}$$

$$\boxed{B_\nu(T) \approx \frac{2kT}{\lambda^2}}$$

Tämä approksimaatio pätee käytännöllisesti katsoen koko radioalueella. Esim. arvoilla λ = 1 m ja T = 1 K on virhe vasta noin 1 %.

HUOM. Koska radioalueella säteilyn intensiteetti on verrannollinen lämpötilaan, käytetään radioastronomiassa yleensä lämpötilaa säteilyn intensiteetin mittana. Rayleigh-Jeans approksimaatio määrittelee ns. kirkkauslämpötilan T_b (brightness temperature):

$$\boxed{T_{b,\nu} = \frac{\lambda^2}{2k} I_\nu}$$ KIRKKAUSLÄMPÖTILA

Mustalle kappaleelle $I_\nu = B_\nu = \frac{2kT}{\lambda^2}$

$$T_{b,\nu} = \frac{\lambda^2}{2k} \cdot \frac{2kT}{\lambda^2} = T$$ = mustan kpl:een lämpötila

Myös silloin, kun kyseessä ei ole terminen, mustan kappaleen säteily, käytetään kirkkauslämpötilaa intensiteetin muodollisena mittana. Tällöin T_b vastaa sitä lämpötilaa, mikä mustalla kappaleella pitäisi olla, jotta sen säteilyn intensiteetti kyseisellä taajuudella olisi sama kuin havaittu, ei-termisen kohteen intensiteetti.

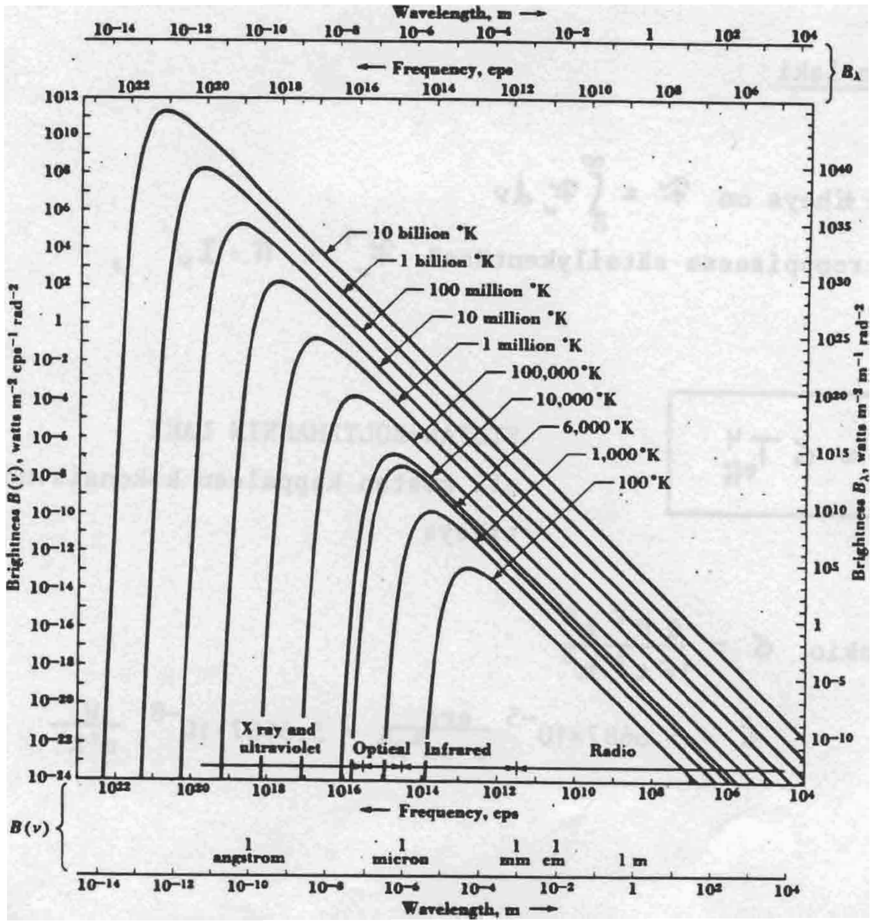


Fig. Planck-law radiation curves to logarithmic scales with brightness expressed as a function of frequency $B(\nu)$ (left and bottom scales) and as a function of wavelength B_λ (right and top scales). Wavelength increases to the right.

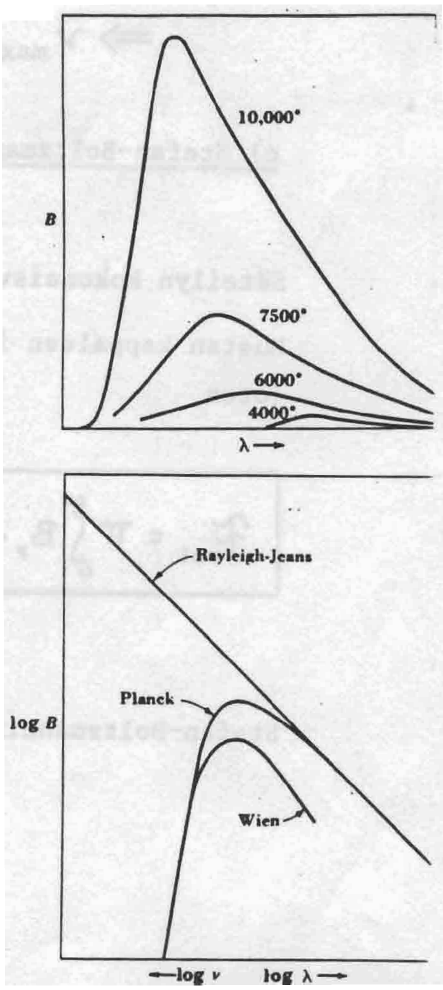


Fig. The Rayleigh-Jeans-radiatio law curve coincides with the Planck-radi tion-law curve at long wavelengths, wh the Wien-radiation-law curve coincides wi the Planck curve at short wavelengths.

b) Wienin siirtymälaki

Wien havaitsi, että mustan kappaleen säteilyintensiteetin maksimi siirtyy lämpötilan kasvaessa kohti pienempiä aallonpituuksia siten, että

$$\boxed{\lambda_{max} \cdot T = \text{vakio} = 0.289782\ \text{cm}\cdot\text{K}}$$ WIENIN SIIRTYMÄLAKI

missä λ_{max} = Planckin funktion (B_λ) maksimikohdan aallonpituus

ESIM. 3K-taustasäteilyn $\lambda_{max} = \dfrac{0.29\ \text{cm}\cdot\text{K}}{3\ \text{K}} \approx 1$ mm

HUOM. λ_{max} on nimenomaan B_λ -funktion maksimikohta: $\dfrac{dB_\lambda(T)}{d\lambda} = 0$

$\nu_{max} \neq \dfrac{c}{\lambda_{max}}$ koska $B_\nu \neq B_\lambda$

ν_{max} saadaan maksimoimalla funktio $B_\nu = \dfrac{c}{\nu^2} \cdot B_\lambda$

$\Longrightarrow \nu_{max} = 5.8787 \cdot T\ \frac{\text{Hz}}{\text{K}}$

c) Stefan-Boltzmannin laki

Säteilyn kokonaisvuon tiheys on $\mathcal{F} = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu \, d\nu$

Mustan kappaleen isotrooppisessa säteilykentässä $\mathcal{F}_\nu^+ = \pi \cdot I_\nu$, joten

$$\boxed{\mathcal{F}_{out} = \pi \int_0^\infty B_\nu \, d\nu = \sigma T_{eff}^4}$$ STEFAN-BOLTZMANNIN LAKI eli mustan kappaleen kokonaisvuon tiheys

Stefan-Boltzmannin vakio $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}$

$$\sigma = 5.6687 \times 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{s}\cdot\text{cm}^2\text{K}^4} = 5.6687 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$$

Kokonaisvuontiheys on siten verrannollinen lämpötilan 4. potenssiin. Stefan-Boltzmannin lain avulla määriteltyä lämpötilaa kutsutaan efektiiviseksi lämpötilaksi T_{eff}:

$$\mathcal{F}_{out} = \sigma T_{eff}^4 \quad \Longrightarrow \quad T_{eff} = \sqrt[4]{\frac{\mathcal{F}_{out}}{\sigma}}$$

HARJ.TEHT. Johda Planckin laista lähtien Stefan-Boltzmannin laki sekä Wienin siirtymälaki.

d) Mustan kappaleen säteilytiheys

Isotrooppisessa säteilykentässä on säteilyn energiatiheys

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int_\Omega I_\nu \, d\omega = \frac{I_\nu}{c} \int_\Omega d\omega = \frac{4\pi}{c} I_\nu$$

Mustan kappaleen monokromaattinen energiatiheys on siten

$$\boxed{u_\nu = \frac{4\pi}{c} \cdot B_\nu(T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}}$$

MONOKROMAATTISEN SÄTEILYN ENERGIATIHEYS

$$[u_\nu] = \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \text{Hz}} \quad ; \quad \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \cdot \text{Hz}}$$

Integroitaessa yli kaikkien taajuuksien sekä huomioimalla Stefan-Boltzmannin laki saadaan

$$u = \int_0^\infty u_\nu \, d\nu = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B_\nu(T) \, d\nu = \frac{4}{c} \cdot \sigma T^4$$

$$\boxed{u(T) = a\, T_{eff}^4}$$

MUSTAN KAPPALEEN SÄTEILYTIHEYS

vakio $a = \frac{4\sigma}{c} = 7.5634 \cdot 10^{-15} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \text{K}^4} = 7.5634 \cdot 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \cdot \text{K}^4}$

ESIM. Määritä säteilypaine Auringon atmosfäärissä (T = 5700 K), kun oletetaan, että Aurinko on isotrooppisen säteilykentän omaava musta kappale.

$$P_R = \frac{u}{3} = \frac{1}{3}\,aT^4$$

$$P_R = \frac{1}{3} \times 7.5634\times10^{-15} \times 5700^7 \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^3} = 2.65\,\frac{\mathrm{dyn\cdot cm}}{\mathrm{cm}^3}$$

$$P_R = 2.65\,\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}^2}$$

Auringon atmosfäärissä on kaasunpaine $P_{gas} \approx 80\,000\,\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}^2}$, joten säteilypaineella ei merkitystä Auringon atmosfäärissä. (Sen sijaan Auringon keskustassa, jossa $T \approx 15\cdot10^6$ K on $P_R = 1.18\cdot10^{14}$ dyn cm^{-2})

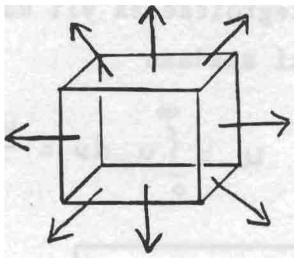
ESIM. Säteilypaine ylijättiläisen atmosfäärissä, jossa T = 10 000 K.

$$P_R = \frac{1}{3}\,aT^4 = 25\ \mathrm{dyn\,cm^{-2}}$$

Koska kaasunpaine $P_{gas} \approx 100$ dyn cm^{-2} on säteilypaine huomioitava ylijättiläisten atmosfääreissä.

2.1.3 Säteilyn emissio- ja absorptiokerroin

a) Säteilyn emissiokerroin



Tähden tilavuusalkion dV avaruuskulmaan $d\omega$ säteilemä energia taajuusvälissä $(\nu, \nu + d\nu)$ on verrannollinen alkion massaan $dm = \rho\, dV$.

$$dE_\nu \sim dm\cdot dt\cdot d\nu\cdot d\omega = \rho\, dV\, dt\, d\nu\, d\omega$$

Tarkasteltaessa tilavuusalkion kaikkiin suuntiin säteilemää energiamäärää on integroitava yli kaikkien suuntien ($\oint d\omega = 4\pi$), jolloin

$$dE_\nu = j_\nu\cdot \rho\, dV\, dt\, d\nu\cdot 4\pi$$

Tämä määrittelee verrannollisuuskertoimen j_ν, jota kutsutaan emissiokertoimeksi

$$\boxed{j_\nu = \frac{1}{4\pi}\,\frac{dE_\nu}{dt\,d\nu\,dm}}$$

EMISSIOKERROIN
(massayksikköä kohti)

$$[j_\nu] = \frac{\text{erg}}{\text{s Hz g}} = \frac{\text{erg}}{\text{g}} \;;\; \frac{\text{J}}{\text{g}}$$

HUOM. Keskimääräinen intensiteetti: $J_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint I_\nu\, d\omega$

$$\Rightarrow dJ_\nu = \frac{1}{4\pi} I_\nu\, d\omega = \frac{1}{4\pi}\,\frac{dE_\nu\,\cancel{d\omega}}{dt\,d\nu\,dA_\perp\,\cancel{d\omega}}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\,\frac{dE_\nu}{dt\,d\nu\,\underbrace{dA_\perp\,dx\,\rho}_{dm}}\cdot \rho\,dx$$

$$\underline{dJ_\nu = j_\nu\,\rho\,dx}$$

b) Säteilyn absorptiokertoimet ja optinen syvyys

Käytetään seuraavia merkintöjä:

$$\boxed{\alpha_\nu = \text{yhden atomin absorptiokerroin}}$$

$$[\alpha_\nu] = \text{cm}^2$$

HUOM. Atomin ns. efektiivinen pinta-ala (vaikutusala) $= \int_0^\infty \alpha_\nu\, d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e \cdot c}$

(kts. luku 2.5.2.e)

$$\boxed{\kappa_\nu = \text{tilavuusabsorptiokerroin}}$$

$\kappa_\nu = N\alpha_\nu$, missä N = taajuudella ν absorboivien hiukkasten lukumäärä kuutiosenttimetrissä

$$[\kappa] = \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^3} = \frac{1}{\text{cm}}$$

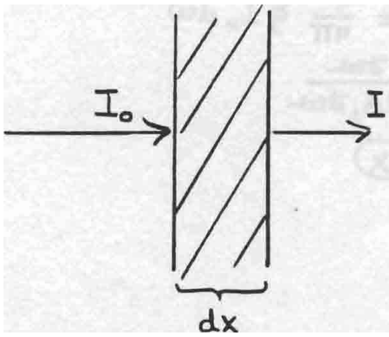
κ_ν riippuu materian kemiallisesta koostumuksesta, säteilyn taajuudesta, paineesta ja lämpötilasta.

$\boxed{k_\nu = \text{massa-absorptiokerroin}}$

$k_\nu = \frac{\kappa_\nu}{\rho}$, missä ρ = absorboivan väliaineen tiheys

$$[k_\nu] = \frac{1}{\mathrm{cm}} : \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{g}}$$

k_ν kuvaa siten säteilyn absorptiovaikutusta väliaineen yhtä grammaa kohti.



Absorption johdosta pienenee intensiteetti säteilyn kulkiessa väliaineen läpi:

$$dI_\nu = -\kappa_\nu dx\, I_\nu \quad \Rightarrow \quad \kappa_\nu = -\frac{dI_\nu/I_\nu}{dx}$$

Tilavuusabsorptiokerroin ilmoittaa täten intensiteetin suhteellisen vähenemisen matkalla dx .

Käytettäessä massa-absorptiokerrointa k_ν on

$$dI_\nu = -\rho k_\nu dx\, I_\nu$$

$$\frac{dI_\nu}{I_\nu} = -\rho k_\nu dx \quad \Big| \int$$

$$\ln \frac{I_\nu}{I_{o\nu}} = -\int_0^x \rho(x') k_\nu(x')\, dx'$$

$$I_\nu(x) = I_{o\nu}\, e^{-\int_0^x \rho(x') k_\nu(x') dx'}$$

Määritellään väliaineen <u>optinen syvyys</u> : $\boxed{\tau_\nu(x) = \int_0^x \rho(x')\, k_\nu(x')\, dx'}$

Tiheyden ja massa-absorptiokertoimen ollessa vakioita on $\tau_\nu(x) = \rho k_\nu x$

$$\Rightarrow \boxed{I_\nu(x) = I_{o\nu}\, e^{-\tau_\nu(x)}}$$

ESIM. Kun $\tau_\nu = 1 \Rightarrow I_\nu = \frac{1}{e} I_{0\nu}$ ts. intensiteetti pienentynyt osaan $\frac{1}{e} = 0.37$

Optinen syvyys kuvaa väliaineen "läpinäkyvyyttä". Mitä suurempi τ, sitä suurempi ekstinktio (ts. absorptio ja sironta) kyseisessä väliaineessa eli sitä huonompi "läpinäkyvyys".

c) Säteilypaine osittain absorboivassa väliaineessa

Säteilypaineen aiheuttaman mekaanisen voiman suuruus riippuu siitä, kuinka suuri osa säteilystä absorboituu tarkastelukohteeseen.
Jos kaikki säteily absorboituu tarkastelukohteeseen, on paine P yhtäsuuri kuin mustan kappaleen säteilypaine (kts. luku 2.1.1.e) :

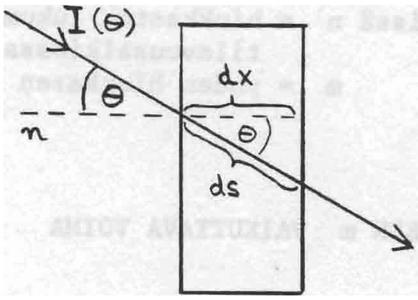
$$P = P_R = \frac{1}{c} \int_\Omega I(\theta,\phi) \cos^2\theta \, d\omega$$

Mutta, jos tarkasteltavaan massa-alkioon absorboituu vain osa säteilystä, on tietystä suunnasta θ tulevan säteilyn synnyttämä paine

$$dP_\nu(\theta) = \frac{1}{c} I_\nu(\theta,\phi) \cos^2\theta \, d\omega \, d\nu \, d\tau_\nu$$

, missä optinen syvyys $d\tau_\nu$ kuvaa absorption osuutta

Tasapaksulle levymäiselle massa-alkiolle on optinen syvyys



$$d\tau_\nu(\theta) = \rho k_\nu \, ds \qquad \cos\theta = \frac{dx}{ds}$$

$$ds = \frac{dx}{\cos\theta} = dx \cdot \sec\theta$$

$$d\tau_\nu(\theta) = \rho k_\nu \, dx \sec\theta$$

Levymäisessä väliainekerroksessa on suunnasta Θ tulevan säteilyn synnyttämä paine siten

$$dP_\nu(\theta) = \frac{\rho k_\nu dx}{c} I_\nu(\theta,\phi)\cos\theta \, d\omega \, d\nu$$

Huomioimalla kaikista suunnista saapuvaa säteilyä saadaan

$$dP_\nu = \frac{\rho k_\nu dx\, d\nu}{c} \underbrace{\int_\Omega I_\nu(\theta,\phi)\cos\theta \, d\omega}_{\mathcal{F}_\nu} = \frac{\rho dx}{c} k_\nu \mathcal{F}_\nu \, d\nu$$

Integroimalla yli säteilyn kaikkien taajuuksien saadaan

$$dP = \frac{\rho dx}{c} \int_0^\infty k_\nu \mathcal{F}_\nu \, d\nu$$

$$\bar{k} = \frac{\int k_\nu \mathcal{F}_\nu d\nu}{\int \mathcal{F}_\nu d\nu}$$ = keskimääräinen absorptiokerroin

$$\boxed{dP = \frac{\rho \bar{k} dx}{c} \mathcal{F}}$$

SÄTEILYPAINE OSITTAIN ABSORBOIVASSA VÄLIAINEKERROKSESSA

Tarkastelukohteeseen vaikuttava mekaaninen voima on siten

$$F_R = P \cdot A = \frac{\rho \bar{k} A \Delta x}{c} \mathcal{F}$$

$$V = A \cdot \Delta x$$

$$\rho = \frac{n m}{V}$$

$$F_R = n \frac{m \bar{k} \mathcal{F}}{c}$$

missä n = hiukkasten lukumäärä tilavuusalkiossa V
m = yhden hiukkasen massa

Voima yhtä hiukkasta kohden on täten

$$\boxed{\frac{F_R}{n} = \frac{m \bar{k} \mathcal{F}}{c}}$$

MASSAHIUKKASEEN m VAIKUTTAVA VOIMA

Säteilypaineen ansiosta saa massahiukkanen m kiihtyvyyden

$$a_R = \frac{F_R}{n m}$$

$$\boxed{a_R = \frac{\bar{k} \cdot \mathcal{F}}{c}}$$

SÄTEILYPAINEESTA JOHTUVA HIUKKASEN KIIHTYVYYS

ESIM. AO-luokan tähden atmosfäärissä on

$$T = 10\ 000\ \mathrm{K}$$

$$\bar{k} = 27$$

$$\mathcal{F} = \sigma T^4 = 5.67\cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{cm}^2} = 5.67\cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Säteilypaineen gradientti on tällöin

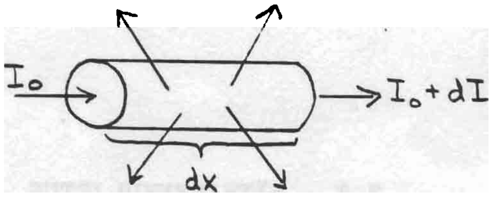
$$\frac{dP}{dx} = \frac{\rho\cdot\bar{k}\cdot\mathcal{F}}{c} = \frac{\rho\bar{k}\sigma T^4}{c} = 2\times 10^4\times\rho\ \frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}^3} = 2\times 10^5\times\rho\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}$$

ja hiukkasen saama kiihtyvyys

$$a_R = \frac{\bar{k}\cdot\mathcal{F}}{c} = 510\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = 5.1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$ (vrt. havaittuun aurinkotuulen efektiin $a \approx 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)

d) Kirchhoffin laki

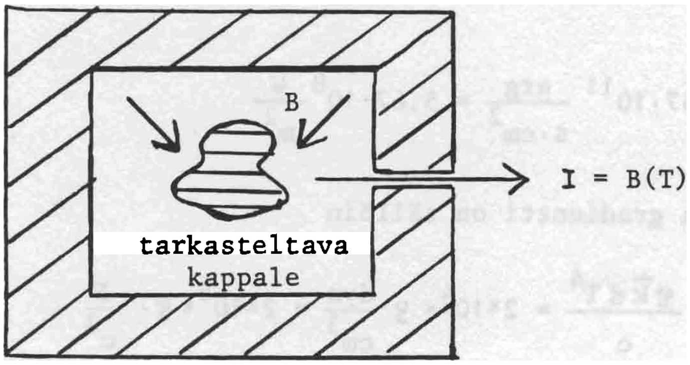
Säteilyintensiteetin nettomuutos tähden atmosfäärissä syvyydessä x olevassa tilavuusalkiossa on



$$dI_\nu = \underbrace{\text{emittoitunut keskimäär. intensiteetti}}_{dJ_\nu = \frac{1}{4\pi} I_\nu d\omega \,=\, \rho j_\nu dx \text{ (kts. a-kohtaa)}} - \left|\underbrace{\text{absorboitunut intensiteetti}}_{k_\nu dx I_\nu \text{ (kts. b-kohtaa)}}\right|$$

$$dI_\nu = \rho j_\nu dx - \rho k_\nu dx\cdot I_\nu$$

Mikäli kohteen emittoima säteily riippuu vain lämpötilasta on $I_\nu = B_\nu(T)$ = Planckin funktio. Tällöin intensiteetin nettomuutos $dI_\nu = 0$ Jos esimerkiksi tarkasteltava tilavuusalkio pantaisiin mustan kappaleen sisälle, olisi saapuvan säteilyn intensiteetti $I_\nu = B_\nu(T)$. Ko. tilavuus-alkio asettuisi silloin myös lämpötilaan T ja sen emittoima säteily olisi myöskin mustan kappaleen säteilyä.



$$dI_\nu = 0$$

$$\Rightarrow \rho j_\nu dx - \rho k_\nu dx \cdot I_\nu = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{j_\nu}{k_\nu} = B_\nu(T)}$$

KIRCHHOFFIN LAKI (v. 1860)
(pätee, kun emissio riippuu vain lämpötilasta)

2.2 SÄTEILYNKULJETUS

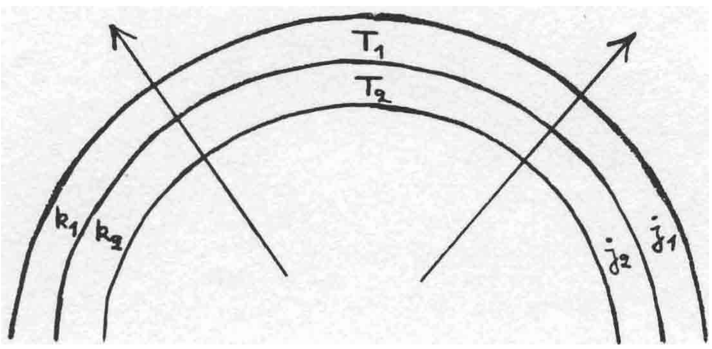
2.2.1 Yleistä

Fotonien liikkuessa väliaineessa tapahtuu törmäyksiä väliaineatomien kanssa. Näissä vuorovaikutusprosesseissa fotoni voi vastaanottaa energiaa sekä jälleen luovuttaa sen väliaineelle takaisin myöhemmissä törmäyksissä. Energian kuljetus säteilyn avulla perustuu siihen, että tähden kuumemmassa osassa emittoituneet fotonit absorboituvat kylmemmässä osassa siirtäen näin energiaa ulospäin. Esimerkiksi Auringon keskustassa syntynyt energiapulssi tarvitsee keskimäärin noin 10^6 vuotta, ennen kuin se fotonien ja kaasuatomien satunnaisten törmäysprosessien välityksellä kulkeutuu Auringon pinnalle.

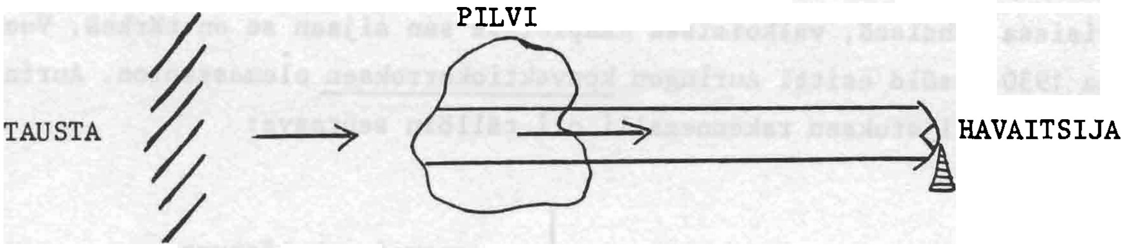
Vuonna 1906 Karl Schwarzschild osoitti, että Auringon fotosfäärissä energia siirtyy säteilyn avulla. Hänen stationääristen säteilykenttien teoriansa kuuluu tähtien teorian peruspilareihin.
Energia voi siirtyä paitsi säteilyn avulla myös konvektiolla (massavirtausten avulla) sekä johtumalla. Lämmön johtuminen on merkityksetön tavallisissa tähdissä, valkoisissa kääpiöissä sen sijaan se on tärkeä. Vuonna 1930 Unsöld esitti Auringon konvektiokerroksen olemassaolon. Auringon energiankuljetuksen rakennemalli oli tällöin seuraava:

alue	energian kuljetustapa
$r < 0.76\ R_\odot$	säteilynkuljetus
$0.76\ R_\odot < r < 0.9995\ R_\odot$	konvektio
$r > 0.9995\ R_\odot$	säteilynkuljetus

Auringon havaittu säteily on peräisin Auringon eri pintakerroksista. Se, mitenkä syvältä säteily on peräisin, riippuu ylempien kerrosten absorptioominaisuuksista - eri kerroksilla on nimittäin erilainen lämpötila, emissio- ja absorptiokerroin.



Toisentyyppinen säteilynkuljetusprobleema esiintyy tähtienvälisessä pilvessä, jossa on huomioitava pilven oma emissio sekä pilven takaa tulevan säteilyn heikentyminen. Lisäksi osa pilvessä syntyneestä säteilystä ehtii absorboitua pilveen ennen kuin se saapuu havaitsijalle.



Säteilynkuljetuksen probleema voidaan lyhimmässä muodossa formuloida seuraavasti:

$$\boxed{\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{kulj.}} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{törm.}}}$$

, missä N = fotonien lukumäärä faasiavaruuden alkiossa ($d^3r\ d^3k$)

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \dot{\bar{r}}\frac{\partial N}{\partial \bar{r}} + \dot{\bar{k}}\frac{\partial N}{\partial \bar{k}} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{törm.}}$$

$\bar{k}$ = aaltoluku = $\frac{2\pi}{\lambda}$ $\quad (\bar{p} = \hbar\bar{k})$

Säteilynkuljetusprobleeman yleinen ratkaisu johtaa "hankaliin" differentiaali-integraaliyhtälöihin. Sopivilla fysikaalisilla approksimaatioilla ratkeaa probleema matemaattisesti yksinkertaisellakin tavalla. Käytännössä nämä likimääräiset ratkaisumenetelmät ovat osoittautuneet optimaalisiksi tarkkuuden suhteen tähtitieteen tietyissä tarkastelukohteissa. Astrofysiikan peruskurssilla tutustutaan vain säteilynkuljetusyhtälön approksimatiivisiin ratkaisumenetelmiin.

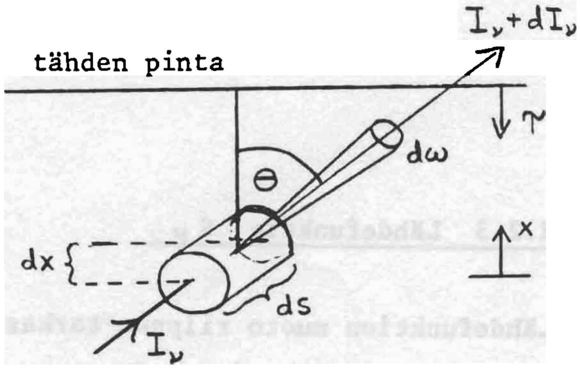
2.2.2 Säteilynkuljetusyhtälö

Tarkastellaan tähden atmosfäärissä syvyydessä x olevaan sylinterimäiseen tilavuusalkioon ($dV = dA \cdot ds$) saapuvaa säteilyä sekä tästä tilavuusalkiosta avaruuskulmaan $d\omega$ emittoituvaa säteilyä, jonka taajuus on välissä (ν, $\nu + d\nu$).

Merkitään

I_ν = tilavuusalkioon saapuvan säteilyn intensiteetti

$I_\nu + dI_\nu$ = alkiosta emittoituvan säteilyn intensiteetti



$$\boxed{\text{tilavuusalkiosta poistuva energia}} = \boxed{\text{tilavuusalkioon saapuva energia}} - \boxed{\text{tilavuusalk. absorb. energ.}} + \boxed{\text{tilav.alkion emitt. energ.}}$$

$$(I_\nu + dI_\nu)\, dA_\perp d\omega\, d\nu\, dt = I_\nu\, dA_\perp d\omega\, d\nu\, dt - k_\nu \rho \cdot ds\, I_\nu \cdot dA_\perp d\omega\, d\nu\, dt + j_\nu \rho \cdot \underbrace{dV}_{dA_\perp ds} \cdot d\omega\, d\nu\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{dI_\nu}{ds} = \dot{j}_\nu \rho - k_\nu \rho I_\nu$$

$$\Rightarrow \frac{dI_\nu}{k_\nu \rho\, ds} = \frac{\dot{j}_\nu}{k_\nu} - I_\nu$$

$$ds = \frac{dx}{\cos\theta}$$

$$d\tau_\nu = -k_\nu \rho\, dx \qquad (d\tau \uparrow\downarrow dx)$$

merkitään :

$$\frac{\dot{j}_\nu}{k_\nu} = S_\nu = \text{lähdefunktio}$$

(source function)

$$\Rightarrow \cos\theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -S_\nu + I_\nu$$

$$\boxed{\cos\theta \, \frac{dI_\nu(\tau_\nu,\theta,\nu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu,\theta,\nu) - S_\nu(\tau_\nu,\nu)}$$ SÄTEILYNKULJETUS-YHTÄLÖ

2.2.3 Lähdefunktio S_ν

Lähdefunktion muoto riippuu tarkastelupisteessä vallitsevista fysikaalisista olosuhteista. Seuraavassa eräitä tärkeitä rajatapauksia.

a) Oletetaan puhdas absorptio ja paikallinen termodynaaminen tasapaino (LTE = local thermodynamic equilibrium, kts. luku 2.3.10)

Riippumatta saapuvasta säteilystä ja absorptiotavasta emittoituu säteily aina ympäristönsä vastaavassa lämpötilassa Planckin funktion mukaisesti. Tällöin pätee Kirchhoffin laki:

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu} = B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$\boxed{S_\nu = B_\nu}$$ PLANCKIN FUNKTIO

b) Oletetaan pelkkä sironta tai monokromaattinen säteilytasapaino

Koherentissa sironnassa emittoituu jokainen kvantti välittömästi samalla taajuudella, jolla se absorboituu. Sironta riippuu siten saapuvasta säteilystä.

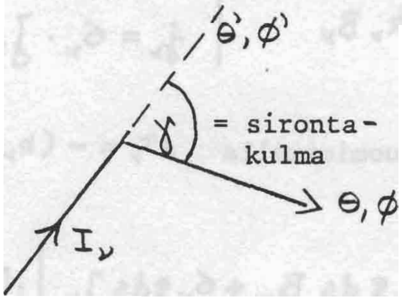
Lähdefunktio on tällöin = saapuvan säteilyn keskimääräinen intensiteetti (keskiarvo otettu yli kaikkien suuntien)

Isotrooppisessa sironnassa: $S_\nu = \dfrac{\oint I_\nu d\omega}{\oint d\omega}$, missä I_ν = saapuvan säteilyn intensiteetti

$$S_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint I_\nu d\omega$$

$$\boxed{S_\nu = J_\nu}$$ keskimääräinen monokromaattinan intensiteetti

Anisotrooppisessa sironnassa: $$\boxed{S_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint p(\cos\gamma)\cdot I_\nu d\omega}$$



missä vaihefunktio $p(\cos\gamma)$ on todennäköisyys, jolla säteily emittoituu suuntaan γ.

Normeeraus: $\frac{1}{4\pi}\oint p(\cos\gamma)d\omega = 1$

Esim.

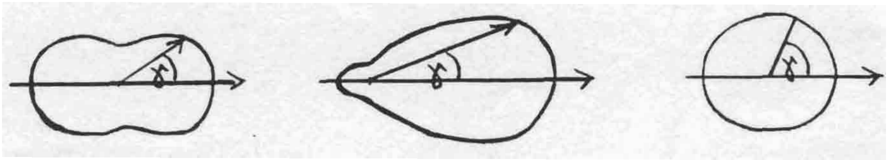
Isotrooppisessa sironnassa $p(\cos\gamma)=1$

Rayleigh-sironnassa $p(\cos\gamma)= \frac{3}{4}(1+\cos^2\gamma)$

HUOM. 1 Kun tämä lähdefunktio sijoitetaan säteilynkuljetusyhtälöön, saadaan integraali-differentiaaliyhtälö (ns. Milnen integraaliyhtälö)

HUOM. 2 Kun atmosfäärissä tapahtuu yksinomaan sirontaa käytetään absorptiokeroimen k_ν asemasta sirontakerrointa σ_ν , jolloin $d\tau_\nu = -\sigma_\nu\cdot\rho\cdot dx$. Elektronisironnassa $\sigma_\nu = \sigma$.

HUOM. 3 Sironta tärkeä planeettojen atmosfääreissä sekä tähtienvälisessä pölyssä. Tähtien atmosfääreissä on sironta elektroneista huomioitava vain kuumimmissa tähdissä sekä tietyissä ylijättiläisissä.



Rayleighin sironta (koko $\ll \lambda$) | Mien sironta (koko $\approx \lambda$) | isotrooppinen sironta : $p(\cos\gamma)=1$

KUVA : Vaihefunktion $p(\cos\gamma)$ muoto erityyppisissä sironnoissa.

c) <u>Oletetaan, että atmosfäärissä tapahtuu sekä absorptiota että sirontaa</u>

Tällöin

$$dI_\nu = -\underbrace{(k_\nu + \sigma_\nu)}_{\text{ekstinktio-kerroin}}\rho\, ds\, I_\nu + \underbrace{j_\nu \rho\, ds}$$

terminen emissio + sironnasta aiheutuva emissio
(olet. LTE)

$$\frac{j_\nu}{k_\nu} = B_\nu \qquad\qquad S_\nu = \frac{j_\nu}{\sigma_\nu} = \underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint p(\cos\gamma)\cdot I_\nu\, d\omega}_{J_\nu}$$

$$j_\nu = k_\nu B_\nu \qquad\qquad j_\nu = \sigma_\nu \cdot J_\nu$$

Olettamalla isotrooppinen sironta ja huomioimalla $d\tau_\nu = -(k_\nu + \sigma_\nu)\rho\, dx$
saadaan

$$dI_\nu = -(k_\nu+\sigma_\nu)\rho\, ds\, I_\nu + k_\nu \rho\, ds\, B_\nu + \sigma_\nu \rho\, ds\, J_\nu \quad \Big| : \Big[-(k_\nu+\sigma_\nu)\rho \underbrace{ds}_{\frac{dx}{\cos\theta}}$$

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \underbrace{\left(\frac{k_\nu}{k_\nu+\sigma_\nu}\cdot B_\nu + \frac{\sigma_\nu}{k_\nu+\sigma_\nu}\cdot J_\nu\right)}_{S_\nu}$$

Merkitsemällä $\boxed{\tilde{\omega}_0 = \frac{\sigma_\nu}{k_\nu+\sigma_\nu}} = \frac{\text{sirontakerroin}}{\text{ekstinktiokerroin}}$ = 'single scattering albedo'

jolloin $1 - \tilde{\omega}_0$ ilmoittaa todellisen absorption osuuden,

saadaan säteilynkuljetusyhtälön lähdefunktion lausekkeeksi :

$$\boxed{\begin{aligned} S_\nu &= \frac{k_\nu}{k_\nu+\sigma_\nu} B_\nu + \frac{\sigma_\nu}{k_\nu+\sigma_\nu} J_\nu \\ S_\nu &= (1-\tilde{\omega}_0) B_\nu + \tilde{\omega}_0 J_\nu \end{aligned}}$$

2.2.4 Säteilytasapaino

Mikäli energiankuljetus tähdessä tapahtuu yksinomaan säteilyn avulla (ts. konvektiota ei esiinny), vallitsee säteilytasapaino. Energiaperiaatteen mukaisesti on tähdessä tällöin säteilyn kokonaistehon pysyttävä vakiona, ts. säteilyn kokonaisintensiteetin nettomuutoksen on oltava = 0 tarkasteltavassa tilavuusalkiossa, jossa itsessään ei oleteta syntyvän ydinenergiaa.
Säteilynkuljetusyhtälö ilmoittaa säteilyintensiteetin nettomuutoksen ds-pituisessa sylinterimäisessä tilavuusalkiossa:

$$dI_\nu = j_\nu \rho\, ds - k_\nu \rho\, ds\, I_\nu$$

Integroimalla yli kaikkien suuntien ja taajuuksien saadaan säteilyn kokonaisintensiteetin muutos dI_{tot}. Säteilytasapainossa on siis $dI_{tot} = 0$

$$0 = ds\cdot\rho \oint\int_0^\infty j_\nu \frac{d\omega}{4\pi} d\nu - ds\cdot\rho \oint\int_0^\infty k_\nu I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} d\nu \quad \Big| : \rho\, ds$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty k_\nu \frac{j_\nu}{k_\nu} d\nu = \int_0^\infty k_\nu J_\nu\, d\nu$$

$$\boxed{\int_0^\infty k_\nu S_\nu\, d\nu = \int_0^\infty k_\nu J_\nu\, d\nu}$$

Harmaassa atmosfäärissä $(k_\nu = k)$: $\cancel{k}\int_0^\infty S_\nu d\nu = \cancel{k}\int_0^\infty J_\nu d\nu \Leftrightarrow \boxed{S = J}$

HUOM. 1 Kun säteilysuureesta jätetään alaindeksi ν pois, tarkoittaa se, että ko. säteilysuure on integroitu yli kaikkien taajuuksien.

HUOM. 2 Tietyllä taajuudella ν ei yleensä päde: $ds \cdot j_\nu \rho = ds\, k_\nu \rho \oint I_\nu \frac{d\omega}{4\pi}$
Tällöin nimittäin ei olisi säteilygradienttia tilavuusalkion päiden välissä, ja mitään säteilynkuljetusta ei tapahtuisi.

Säteilytasapainon seurauksena pysyy tasomaisessa atmosfäärissä säteilyn kokonaisvuon tiheys $\mathcal{F}$ vakiona. (Pallogeometrisisssa tilanteissa $L_r = 4\pi r^2 \cdot \mathcal{F}$ = vakio, olettaen, että pallokuoressa ei ole säteilylähteitä).

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{dx} = j_\nu \rho - k_\nu \rho I_\nu \qquad \Big| \int_0^\infty \ldots d\nu \Big| \quad d\mathcal{F}_\nu = \cos\theta\, dI_\nu$$

$$\int_0^\infty \frac{d\mathcal{F}_\nu}{dx} d\nu = \underbrace{\rho \int_0^\infty j_\nu\, d\nu - \rho \int_0^\infty k_\nu I_\nu\, d\nu}_{= 0 \text{ säteilytasapainossa}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{F}}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F} = \text{vakio}} \iff \mathcal{F}_{out} - \mathcal{F}_{in} = \text{vakio}$$

HUOM. Kun $\mathcal{F}$ = vakio, niin säteilykenttä käy sitä isotrooppisemmaksi, mitä syvemmälle tähden atmosfääriin mennään.

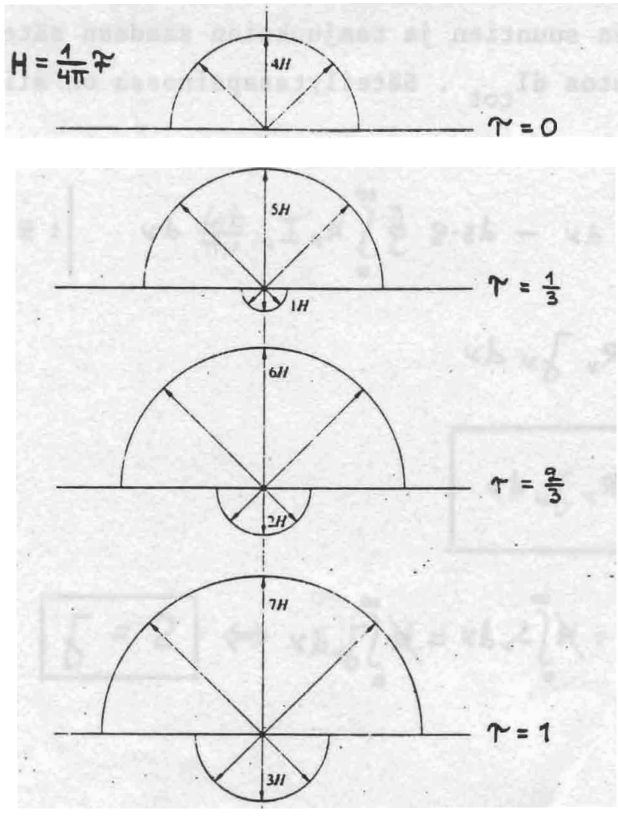


Fig. The intensities I_1 and I_2 increase with depth while maintaining a constant difference $4H$.

2.2.5 Säteilynkuljetusyhtälön määräämä intensiteettilauseke

a) Säteilynkuljetusyhtälön intensiteettilauseke

Säteilynkuljetusyhtälö kirjoitetaan yleensä differentiaaliyhtälön muotoon, mutta se voidaan esittää myös integraalina.

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \qquad \Big| \text{ Merkitään } y = \frac{\tau_\nu}{\cos\theta}$$

$$\frac{dI_\nu}{dy} - I_\nu = - S_\nu \qquad \Big| \cdot e^{-y}$$

$$\underbrace{e^{-y}\frac{dI_\nu}{dy} - I_\nu e^{-y}}_{\dfrac{d(I_\nu e^{-y})}{dy}} = - S_\nu e^{-y}$$

$$\frac{d(I_\nu e^{-y})}{dy} = - S_\nu e^{-y}$$

$$\Longrightarrow \quad I_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\cos\theta}} = - \int_\infty^{\tau_\nu} S_\nu e^{-\frac{\tau_\nu'}{\cos\theta}} \frac{d\tau_\nu'}{\cos\theta} \qquad \Big| : e^{-\frac{\tau_\nu}{\cos\theta}}$$

$$\Longrightarrow \quad I_\nu(\tau_\nu, \theta) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(\tau_\nu') \cdot e^{-\frac{\tau_\nu' - \tau_\nu}{\cos\theta}} \cdot \frac{d\tau_\nu'}{\cos\theta} \qquad \Big| \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{I_\nu(\tau_\nu, \theta) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(\tau_\nu') \cdot e^{-(\tau_\nu' - \tau_\nu)\sec\theta} \sec\theta \, d\tau_\nu'}$$

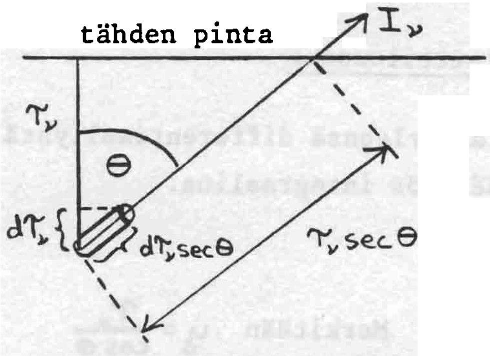
SÄTEILYNKULJETUSYHTÄLÖN INTENSITEETTILAUSEKE

Tarkasteltaessa tilannetta tähden pinnalla, jossa $\tau_\nu = 0$, saadaan säteilyintensiteetin lausekkeeksi :

$$\boxed{I_\nu(0, \theta) = \int_0^{\infty} S_\nu(\tau_\nu') \, e^{-\tau_\nu' \sec\theta} \sec\theta \, d\tau_\nu'}$$

INTENSITEETTI TÄHDEN PINNALLA

Äskeinen yhtälö voidaan 'johtaa' myös suoraan oheisen kuvan avulla



Optisessa syvyydessä τ_ν olevan $d\tau_\nu$ paksuisen tilavuusalkion emissio on

$$S_\nu(\tau_\nu)\cdot \underbrace{d\tau_\nu \sec\theta}_{\text{optinen matka-alkio suunnassa } \theta}$$

Tämä emissio heikentyy tekijällä $e^{-\tau_\nu \sec\theta}$ säteilyn kulkiessa kohti tähden pintaa. Integrointi yli koko kuljetun matkan antaa edellä esitetyn yhtälön $I_\nu(0,\theta)$

Erikoistapauksia :

1) Näkösäde $\perp$ kohteen pinta ($\theta = 0$)

$$\Rightarrow I(0,0) = \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu')e^{-\tau_\nu'}d\tau_\nu'$$

2) Lähdefunktio S_ν ei riipu optisesta syvyydestä τ_ν

$$\Rightarrow I(0,0) = S_\nu \int_0^\infty e^{-\tau_\nu'}d\tau_\nu'$$

$$I(0,0) = S_\nu(1-e^{-\tau_\nu})$$

Kun $\tau_\nu >> 1$: $I_\nu(0,0) \approx S_\nu$

Kun $\tau_\nu << 1$: $I_\nu(0,0) \approx S_\nu[1-(1-\tau_\nu+\ldots)]$

$I(0,0) \approx S_\nu\cdot\tau_\nu$

HUOM. Kun $\tau_\nu \to 0$, niin myös $I_\nu \to 0$
Täten esimerkiksi koronan korkea lämpötila ei juuri lainkaan lisää säteilyn intensiteettiä.

Edellisellä sivulla esitetyn säteilynkuljetusyhtälön intensiteettilausekkeen avulla voidaan selvittää lähdefunktion riippuvuus optisesta syvyydestä sekä kytkeä se havaitun $I_\nu(0,\theta)$ intensiteetin θ - riippuvuuteen (kts. luku 2.2.6.b : Auringon reunatummumisilmiö) sekä emissio- ja absorptiokertoimien väliseen yhteyteen.

b) Suureitten $\mathcal{F}_\nu$ ja $\mathcal{J}_\nu$ yhteys säteilynkuljetusyhtälöön

Säteilynkuljetusyhtälön mukaisesti on intensiteetti tähden pinnalla

$$I_\nu(0,\theta) = \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu')\, e^{-\tau_\nu' \sec\theta} \sec\theta \, d\tau_\nu'$$

Kun tämä sijoitetaan pinnasta ulos tulevan säteilyvuon tiheyden lausekkeeseen, saadaan

$$\mathcal{F}_{\nu,out}(0) = \int_\omega I_\nu(0,\theta)\cos\theta \underbrace{d\omega}_{\sin\theta d\theta d\phi} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu') e^{-\frac{\tau_\nu'}{\cos\theta}} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, d\tau_\nu'$$

huom. avaruuskulma integroidaan yli puolipallon ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

$$\mathcal{F}_{\nu,out}(0) = 2\pi \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu')\, d\tau_\nu' \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\tau_\nu'}{\cos\theta}} \sin\theta \, d\theta$$

Merkitään $\boxed{y = \frac{1}{\cos\theta}}$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta \, d\theta = \frac{dy}{y^2}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu')\, d\tau_\nu' \underbrace{\int_1^\infty \frac{e^{-\tau_\nu' \cdot y}}{y^2}\, dy}$$

vrt. integraalieksponenttifunktioon: $\boxed{E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{y^n}\, dy}$

$$\boxed{\mathcal{F}_{\nu,out}(0) = 2\pi \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu') \cdot E_2(\tau_\nu')\, d\tau_\nu'}$$

SÄTEILYNKULJETUSYHTÄLÖN MUKAINEN VUONTIHEYS TÄHDEN PINNALLA

Kun lähdefunktio S_ν tunnetaan optisen syvyyden funktiona, voidaan integrointi suorittaa. Olettamalla, että tähden atmosfäärissä vallitsee paikallinen termodynaaminen tasapaino, voidaan $S_\nu(\tau_\nu')$ korvata Planckin funktiolla $B_\nu(T)$. Jotta yo. integrointi voitaisiin suorittaa, on tällöin tunnettava $T = T(\tau_\nu)$. Mikäli myös sirontaprosessit on huomioitava, on lämpötilariippuvuuden $T(\tau_\nu)$ lisäksi tunnettava sironta- ja ekstinktiokeroimien suhde $\tilde{\omega}_0 = \frac{\sigma_\nu}{k_\nu + \sigma_\nu}$ sekä vaihefunktio $p(\cos\gamma)$.
Ratkaisutien idea esitetty seuraavassa kaaviokuvassa ja siihen palataan vielä luvussa 2.4 (tähtien atmosfäärimallien laskeminen).

Olet. tunnetuiksi: $T=T(\tau_\nu)$ atmosfäärimalleista

$\tilde{\omega}_0$

$p(\cos\gamma)$

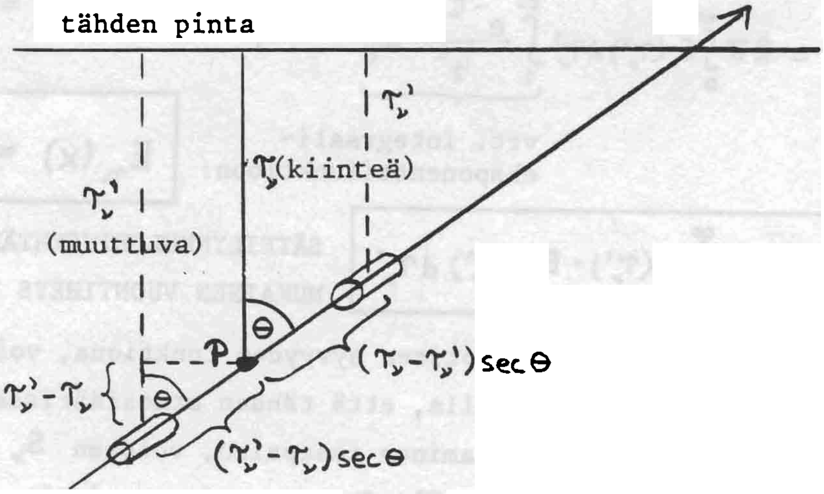
$$\left.\begin{array}{l} T=T(\tau_\nu) \\ \tilde{\omega}_0 \\ p(\cos\gamma) \end{array}\right\} \Rightarrow S_\nu(\tau_\nu) \xRightarrow{E_2(\tau_\nu)} \text{teorett. } \mathcal{F}_{\nu,out}$$

↓

vertailu havaittuun $\mathcal{F}_{\nu,out}$

"feed-back" oletusarvoille

Johdetaan seuraavassa lauseke keskimääräiselle säteilyintensiteetille tähden atmosfäärissä optisella syvyydellä τ_ν.



Alemmista kerroksista ylöspäin etenevän säteilyn intensiteetti tarkastelupisteessä P on :

$$I_\nu^+(\tau_\nu,\theta) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(\tau_\nu')\, e^{-(\tau_\nu'-\tau_\nu)\sec\theta} \sec\theta \, d\tau_\nu' \qquad (\text{huom. } \tau_\nu' > \tau_\nu)$$

Ylemmistä kerroksista alaspäin etenevän säteilyn intensiteetti tarkastelupisteessä P on

$$I_\nu^-(\tau_\nu,\theta) = \underset{\uparrow}{-}\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau_\nu')\, e^{-(\tau_\nu-\tau_\nu')\sec\theta}\sec\theta\, d\tau_\nu' \qquad (\text{huom. } \tau_\nu' < \tau_\nu)$$

jotta saataisiin posit. lauseke ($\cos\theta$ <0)

Keskimääräinen intensiteetti :

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{4\pi}\oint I_\nu(\theta,\tau_\nu)\underbrace{d\omega}_{\sin\theta\, d\theta\, d\phi} = \frac{I_\nu^+ + I_\nu^-}{2}$$

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{2\pi}{4\pi}\int_0^{\pi/2} I_\nu^+ \sin\theta\, d\theta + \frac{2\pi}{4\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} I_\nu^- \sin\theta\, d\theta$$

ylöspäin suuntautuva säteily: integroitava ylemmän puolipallon yli	alaspäin suuntautuva säteily: integroitava alemman puolipallon yli

Sijoittamalla tähän säteilynkuljetusyhtälön mukaiset lausekkeet I_ν^+ ja I_ν^- saadaan

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(\tau_\nu')\,d\tau_\nu' \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\tau_\nu'-\tau_\nu}{\cos\theta}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau_\nu')\,d\tau_\nu' \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\frac{\tau_\nu-\tau_\nu'}{\cos\theta}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta$$

Merkitään 1. termissä $y = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow dy = -\frac{(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}d\theta \Rightarrow \sin\theta\, d\theta = \frac{dy}{y^2}$

2. termissä $y = -\underbrace{\frac{1}{\cos\theta}}_{<0} \Rightarrow dy = -\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta \Rightarrow \sin\theta\, d\theta = -\frac{dy}{y^2}$

integraalieksponettifkt:n argumentin oltava positiivinen

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(\tau_\nu')\,d\tau_\nu' \underbrace{\int_1^{\infty}\frac{e^{-(\tau_\nu'-\tau_\nu)y}}{y}\,dy}_{E_1(\tau_\nu'-\tau_\nu)} - \frac{1}{2}\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau_\nu')\,d\tau_\nu' \int_{\infty}^{1}\frac{e^{-(\tau_\nu-\tau_\nu')(-y)}}{y^2}(-y)(-dy)$$

Jotta viimeinen integraali olisi integraalieksponenttifunktion E_1 muotoinen, on integroimisrajat vaihdettava keskenään

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(\tau_\nu')\,d\tau_\nu' \int_1^{\infty} \frac{e^{-(\tau_\nu'-\tau_\nu)y}}{y}\,dy + \frac{1}{2}\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau_\nu')\,d\tau_\nu' \int_1^{\infty} \frac{e^{-(\tau_\nu'-\tau_\nu)y}}{y}\,dy$$

$$\boxed{J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} S_\nu(\tau_\nu')\cdot E_1(\tau_\nu'-\tau_\nu)\,d\tau_\nu'}$$

SÄTEILYNKULJETUSYHTÄLÖN MUKAINEN KESKIM. INTENSITEETTI

Integrointia varten on jälleen tunnettava lähdefunktio $S(\tau_\nu')$. Kun termodynaamisessa tasapainossa olevassa atmosfäärissä säteily sekä absorboituu että sirottuu, on lähdefunktio

$$S_\nu(\tau_\nu') = \frac{k_\nu}{k_\nu+\sigma_\nu} B_\nu(\tau_\nu') + \frac{\sigma_\nu}{k_\nu+\sigma_\nu} J_\nu(\tau_\nu')$$

$$= (1-\tilde{\omega}_o) B_\nu(\tau_\nu') + \tilde{\omega}_o J_\nu(\tau_\nu')$$

$$\underline{S_\nu(\tau_\nu')} = (1-\tilde{\omega}_o) B_\nu(\tau_\nu') + \frac{\tilde{\omega}_o}{2}\int_0^{\infty} \underline{S_\nu(\tau_\nu')}\cdot E_1(\tau_\nu'-\tau_\nu)\,d\tau_\nu'$$

Tämä integraaliyhtälö voidaan ratkaista, kun $\tilde{\omega}_o$, E_1 ja $B_\nu(\tau_\nu')$ (eli $T = T(\tau_\nu')$) tunnetaan.

Tunnetaan: $T=T(\tau_\nu)$ atmosf. malleista $\xrightarrow{\text{LTE}} B_\nu(\tau_\nu)$

$\tilde{\omega}_o$

1

$\Longrightarrow S_\nu(\tau_\nu) \xrightarrow{E_1} J_\nu(\tau_\nu)$

$S_\nu(\tau_\nu) \xrightarrow{E_2} \mathcal{F}_\nu(\tau_\nu)$

<u>HARJ.TEHT.</u> Osoita, että tähden atmosfäärissä (optinen syvyys τ_ν) säteilyvuon tiheys on

$$\mathcal{F}_\nu(\tau_\nu) = 2\pi\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(\tau_\nu')\cdot E_2(\tau_\nu'-\tau_\nu)\,d\tau_\nu' - 2\pi\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau_\nu')\cdot E_2(\tau_\nu-\tau_\nu')\,d\tau_\nu'$$

2.2.6 Säteilynkuljetusyhtälön approksimatiivisista ratkaisumenetelmistä

a) Eddington-Barbierin menetelmä

Säteilynkuljetusyhtälön määräämä intensiteetti tähden pinnalla ($\tau_\nu = 0$) on

$$I_\nu(0,\theta) = \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu') \, e^{-\frac{\tau_\nu'}{\cos\theta}} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \, d\tau_\nu'$$

Integrointi voidaan suorittaa, kun lähdefunktio $S_\nu(\tau_\nu)$ tunnetaan. Nykyään lähdefunktio johdetaan nemeerisin menetelmin. Aikaisemmin se esitettiin analyyttisten funktioitten sarjakehitelmänä. Esimerkkinä Eddington-Barbierin menetelmä, jossa $S_\nu(\tau_\nu)$ kehitetään Taylorin sarjaksi tietyn optisen syvyyden τ_ν^* ympäristössä :

$$S_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(\tau_\nu^*) + (\tau_\nu - \tau_\nu^*) \frac{dS_\nu}{d\tau_\nu}(\tau_\nu^*) + \frac{\tau_\nu - \tau_\nu^*}{2} \cdot \frac{d^2 S_\nu}{d\tau_\nu^2}(\tau_\nu^*) + \ldots$$

Sijoittamalla tämä säteilynkuljetusyhtälöön sekä integroimalla termeittäin saadaan

$$I_\nu(0,\theta) = S_\nu(\tau_\nu^*) + (\cos\theta - \tau_\nu^*) \frac{dS_\nu}{d\tau_\nu}(\tau_\nu^*) + \frac{\cos^2\theta + (\cos\theta - \tau_\nu^*)}{2} \frac{d^2 S_\nu}{d\tau_\nu^2}(\tau_\nu^*) + \ldots$$

Kun $\tau_\nu^* = \cos\theta \implies \begin{cases} \text{2. termi} = 0 \\ \text{3. termi minimissään} \end{cases}$

Näin ollen arvolla $\tau_\nu^* = \cos\theta$ saadaan hyvä likiarvo säteilyintensiteetille tähden pinnalla:

$$I_\nu(0,\theta) \approx S_\nu(\tau_\nu = \cos\theta)$$

Tämä on yksinkertaisin yhteys, joka selittää Auringon reunantummumisilmiön (Auringon kiekon keskipisteessä $\theta = 0^\circ \Rightarrow \cos\theta = 1$ ja reunalla $\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos\theta = 0$) sekä lähdefunktion riippuvuuden atmosfäärin syvyydestä.

Tähden pinnalla on säteilyvuo yksikköpinnan läpi

$$\mathcal{F}_\nu(0) = 2\pi \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu') \cdot E_2(\tau_\nu')\, d\tau_\nu'$$

Esittämällä $S_\nu(\tau_\nu)$ Taylorin sarjakehitelmänä sekä integroimalla termeittäin saadaaan

$$\mathcal{F}_\nu(0) = \pi \left[S_\nu(\tau_\nu^*) + \left(\tfrac{2}{3} - \tau_\nu^*\right) \frac{dS_\nu}{d\tau_\nu}(\tau_\nu^*) + \ldots \right]$$

Hyvä likiarvo tälle lausekkeelle saadaan arvolla $\tau_\nu^* = 2/3$

$$\mathcal{F}_\nu(0) \approx \pi S_\nu\left(\tau_\nu = \tfrac{2}{3}\right)$$

Ts. tähden pinnalla vallitsevan säteilyvuon tiheyden avulla voidaan arvioida lähdefunktion suuruus optisella syvyydellä $\tau = 2/3$.

Yhdistämällä molemmat tulokset saadaan

$$\left.\begin{aligned} I_\nu(0,\theta) &= S_\nu(\tau_\nu = \cos\theta) \\ \mathcal{F}_\nu(0) &= \pi S_\nu\left(\tau_\nu = \tfrac{2}{3}\right) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{F}_\nu(0) = \pi I_\nu\left(0, \cos\theta = \tfrac{2}{3}\right)}$$

HUOM. 1 Eddington-Barbierin relaatiot pätevät tarkasti, kun lähdefunktio on lineaarinen ($S_\nu = a + b\tau_\nu$) ja pysyy vakiona fotonien vapaan matkan aikana.

HUOM. 2 Eddington-Barbierin relaatiot pätevät likimääräisesti (virhe < 10%) lähdefunktioille, joiden muoto on

$$S_\nu(\tau_\nu) = a + b\tau_\nu + L e^{-\beta\tau_\nu}$$

missä a,b, β ja L ovat vakioita.

Tämäntyyppinen lähdefunktio vastaa tilannetta reaalisessa tähtiatmosfäärissä.

b) Eddingtonin approksimaation antama likimääräinen ratkaisu harmaalle atmosfäärille

Eddingtonin approksimaatiolla saadaan moniin tähtitieteen säteilynkuljetusprobleemoihin käyttökelpoinen likimääräinen ratkaisu.

Eddington määritteli seuraavat säteilyintensiteetin $\cos\theta$-momentit:

$$J = \frac{1}{4\pi}\oint I\, d\omega$$ (keskimääräinen kokonaisintensiteetti)

$$H = \frac{1}{4\pi}\oint I\cos\theta\, d\omega$$ ($H = \frac{1}{4\pi}\mathcal{F}$, missä $\mathcal{F}$ =yksikköpinnan läpi kulkeva nettovuo ulospäin)

$$K = \frac{1}{4\pi}\oint I\cos^2\theta\, d\omega$$ ($K = \frac{c}{4\pi}P_R$, missä P_R = säteilypaine)

Isotrooppisessa säteilykentässä $I = I_o$ (ts. suunnasta riippumaton), joten

$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} I_o \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{I_o}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = I_o \\ K &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} I_o\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{I_o}{2}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta}_{\frac{4\pi}{3}} = \frac{I_o}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{K = \tfrac{1}{3}J}$$

Tämä relaatio ei päde ainoastaan tähden syvemmissä atmosfäärikerroksissa (jossa varsinainen isotrooppinen säteilykenttä), vaan monessa muussakin tilanteessa kuten esimerkiksi

- jos $\begin{cases} I(\theta) = I_o \,, & \text{kun } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ I(\theta) = 0 \,, & \text{kun } \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \end{cases}$ tyypillinen reunaehto pinnalla

- jos $\begin{cases} I(\theta) = I^+ \,, & \text{kun } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ I(\theta) = I^- \,, & \text{kun } \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \end{cases}$

I^+ $\Uparrow$ ulostuleva säteily

$\Downarrow$ sisään menevä säteily I^-

Näitten huomioitten perusteella Eddington teki seuraavan yksinkertaistavan approksimaation:

$$\boxed{\text{Kaikkialla atmosfäärissä pätee: } K = \frac{1}{3} J}$$

EDDINGTONIN APPROKSIMAATIO

Seuraavassa näytetään, että Eddingtonin approksimaatio mahdollistaa pienen anisotrooppisuuden säteilykentässä.

Olet. $I(\tau,\theta) = \underbrace{I_0(\tau)}_{\text{isotrooppinen osa}} + \underbrace{I_1 \cos\theta}_{\text{epäisotrooppinen osa}}$

Tällöin $J = \frac{1}{4\pi} \oint I d\omega = \frac{1}{2}\left[\int_0^\pi I_0 \sin\theta \, d\theta + \int_0^\pi I_1 \cos\theta \sin\theta \, d\theta\right] = I_0$

$$H = \frac{1}{4\pi} \oint I \cos\theta \, d\omega = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\int_0^\pi I_0 \cos\theta \sin\theta \, d\theta}_{=0} + \underbrace{\int_0^\pi I_1 \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}_{=\frac{2}{3} I_1}\right] = \frac{I_1}{3}$$

säteilytasapainossa $\mathcal{F}$ = vakio

$\Rightarrow \underline{\underline{I_1}} = 3H = \frac{3}{4\pi} \mathcal{F}$ = <u>vakio säteilytasapainossa</u>

$$K = \frac{1}{4\pi} \oint I \cos^2 d\omega = \frac{1}{2}\left[\int_0^\pi I_0 \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta + \underbrace{\int_0^\pi I_1 \cos^3\theta \, d\theta}_{=0}\right] = \frac{I_0}{3}$$

sij.

$\Longrightarrow \quad K = \frac{1}{3} J$ myös, kun $I(\tau,\theta) = I_0(\tau) + I_1 \cos\theta$

Ratkoessaan säteilynkuljetusyhtälöä teki Eddington seuraavat fysikaaliset oletukset :

- lähes isotrooppinen säteilykenttä ($\Longleftrightarrow$ Eddingtonin approksimaatio voimassa)
- säteilytasapaino ($\Rightarrow \int k_\nu S_\nu d\nu = \int k_\nu J_\nu d\nu$)
- ns. harmaa atmosfääri eli absorptiokerroin ja optinen syvyys eivät riipu taajuudesta ($k_\nu = k$ ja $\tau_\nu = \tau$). Tämä oletus yksinkertaistaa yhtälön matemaattista käsittelyä ratkaisevasti .

$\Rightarrow k \int S_\nu d\nu = k \int J_\nu d\nu \Longleftrightarrow S = J$

Sijoittamalla ratkaisuyrite $I(\tau,\theta) = I_0(\tau) + I_1 \cos\theta$ taajuuden yli integroituun säteilynkuljetusyhtälöön saadaan

$$\cos\theta \frac{dI(\tau,\theta)}{d\tau} = I(\tau,\theta) - J(\tau) \quad \Big| \text{ sij. } I = I_0(\tau) + I_1\cos\theta$$

$$\cos\theta \frac{dI_0(\tau)}{d\tau} + \cos^2\theta \underbrace{\frac{dI_1}{d\tau}} = \cancel{I_0} + I_1\cos\theta - \Big[\cancel{I_0} \underbrace{\oint \frac{d\omega}{4\pi}}_{=1} + I_1 \underbrace{\oint \cos\theta \frac{d\omega}{4\pi}}_{=0}\Big] \quad \Big| : \cos\theta$$

=0, koska $I_1 = \frac{3\mathcal{F}}{4\pi}$ = vakio säteilytasapainossa (kts. edellinen sivu)

$$\Rightarrow \frac{dI_0(\tau)}{d\tau} = I_1 = \frac{3\mathcal{F}}{4\pi}$$

$$\Rightarrow I_0(\tau) = \frac{3\mathcal{F}}{4\pi}\tau + C$$

Integroimisvakio C saadaan reunaehdosta :

Tähden pinnalla $\begin{cases} \mathcal{F}_{in} = \mathcal{F}^- = 0 \text{ ja } \mathcal{F} = \pi(I^+ - \underbrace{I^-}_{=0}) \\ J(0) = \frac{I^+ + I^-}{2} = \frac{I^+}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow C = I_0(0) = J(0) = \frac{\mathcal{F}}{2\pi}$$

$$\Rightarrow I_0(\tau) = \frac{3\mathcal{F}}{4\pi}\tau + \frac{\mathcal{F}}{2\pi}$$

Sijoittamalla $I_0(\tau)$ sekä I_1 ratkaisuun $I = I_0 + I_1\cos\theta$ saadaan

$$I(\tau,\theta) = \frac{3\mathcal{F}}{4\pi}\cdot\tau + \frac{\mathcal{F}}{2\pi} + \frac{3\mathcal{F}}{4\pi}\cos\theta$$

$$\boxed{I(\tau,\theta) = \frac{\mathcal{F}}{2\pi}\left(1 + \frac{3}{2}\tau + \frac{3}{2}\cos\theta\right)}$$

SÄTEILYNKULJETUSYHTÄLÖN RATKAISU EDDINGTONIN 2. APPROKSIMAATIOSSA

Eddingtonin 1. approksimaatiossa tarkastellaan täysin isotrooppista säteilykenttää (kts. Eddingtonin alkuperäistä ratkaisun johtoa Novotnyn kirjassa luvussa 4.2).

Saadusta ratkaisusta voidaan tehdä seuraavat päätelmät:

1) Kun $\tau \gg 1$ dominoi isotrooppinen osa $I(\tau) = \frac{\mathcal{F}}{2\pi}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right)$

Kun $\tau \ll 1$ voimistuu anisotrooppinen osa $I(\theta) = \frac{3\mathcal{F}}{4\pi}\cos\theta$

2) Kun $\tau = 0$, on intensiteetti tähden pinnalla $I(0,\theta) = \frac{\mathcal{F}}{2\pi}\left(1 + \frac{3}{2}\cos\theta\right)$

Jos lisäksi $\cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow I\left(0, \cos\theta = \frac{2}{3}\right) = \frac{\mathcal{F}}{\pi}$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}(0) = \pi \cdot I\left(0, \cos\theta = \frac{2}{3}\right)$$

Saatiin siis sama relaatio kuin Eddington-Barbier-menetelmässä .

Verrataessa keskenään

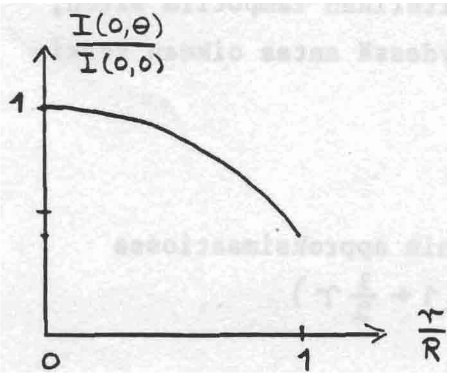
$$\left.\begin{aligned} I(0,\theta) &= \frac{\mathcal{F}}{2\pi}\left(1 + \frac{3}{2}\cos\theta\right) \\ \mathcal{J}(\tau) &= I_0(\tau) = \frac{\mathcal{F}}{2\pi}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} I(0,\theta) &= \mathcal{J}(\cos\theta) \\ \tau_\theta &= \cos\theta \end{aligned}$$

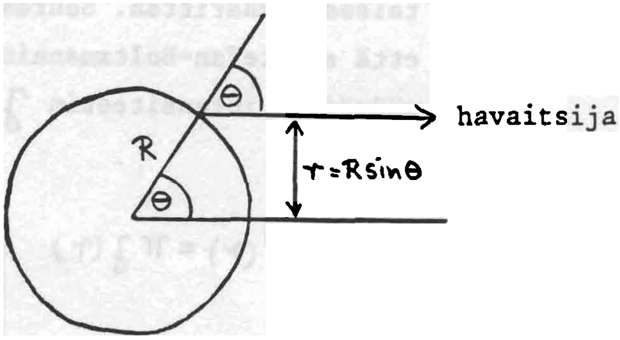
Havaittaessa Auringon kiekon keskikohtaa "nähdään" optiselle syvyydelle $\tau = \cos 0^\circ = 1$. Siirryttäessä kiekon reunoihin päin pienenee havaittu intensiteetti sekä lähdefunktion optinen syvyys $\cos\theta$ -riippuvuuden mukaisesti.

3) Auringon reunantummuminen

$$\frac{I(0,\theta)}{I(0,0)} = \frac{1+\frac{3}{2}\cos\theta}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}\cos\theta\right)$$

Esim. $$\frac{I(0,90^\circ)}{I(0,0)} = \frac{2}{5} = 0.40$$





Eddingtonin approksimaatiolla saadaan hyvä yhteensopivuus havaintojen kanssa laajalla aallonpituusalueella, joten Eddingtonin tekemät fysikaaliset oletukset pätevät melko hyvin Auringon atmosfäärissä.

Pimennysmuuttujien valokäyristä on havaittu reunantummumisilmiötä myös muissa tähdissä.

TABLE

LIMB DARKENING IN THE SUN

Cos θ	Eddington Approximation	Exact Solution (Chandrasekhar)	Münch (Blanketing Effect)	Observed Intensity
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000
0.90	0.940	0.939	0.946	0.944
0.80	0.880	0.878	0.892	0.898
0.70	0.820	0.816	0.838	0.842
0.60	0.760	0.755	0.781	0.788
0.50	0.700	0.692	0.725	0.730
0.40	0.640	0.629	0.666	0.670
0.30	0.580	0.565	0.615	0.602
0.20	0.520	0.499	0.541	0.522
0.10	0.460	0.429	0.467	0.450
0.00	0.400	0.344	0.363	

4) Lämpötilan riippuvuus optisesta syvyydestä

Isotrooppisessa säteilykentässä $J = \frac{1}{4\pi}\oint I\,d\omega = I$

LTE:n vallitessa on tähden pinnalla $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{+} = \pi I = \sigma T^4$

$$\left.\begin{array}{l} J = I \\ \mathcal{F} = \pi I = \sigma T^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi J = \sigma T^4$$

Anisotrooppisessa säteilykentässä ei lämpötilaa voida yksikäsitteisesti määrittää. Seuraavassa määritellään lämpötila siten, että se Stefan-Boltzmannin lain yhteydessä antaa oikean keskimääräisen intensiteetin J .

$$\sigma T^4(\tau) = \pi J(\tau)$$

Eddingtonin approksimaatiossa $J = \frac{\mathcal{F}}{2\pi}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right)$

$$\sigma T^4(\tau) = \frac{\mathcal{F}}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right)$$

$$\Rightarrow \sigma T^4(0) = \frac{\mathcal{F}}{2}$$

Toisaalta:

$$\sigma T_{eff}^4 = \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \sigma T^4(0) = \frac{\sigma T_{eff}^4}{2}$$

$$\boxed{T_{eff} = \sqrt[4]{2}\cdot T(0)}$$

$$T_{eff} \approx 1.19 \cdot T(0)$$

Vertaamalla tätä Chandrasekharin tarkan mallin antamaan efektiiviseen lämpötilaan $T_{eff} = \left[\frac{4}{(3)^{1/2}}\right]^{1/4} = 1.233 \cdot T(0)$ havaitaan, että Eddingtonin approksimaatio antaa melko tarkkoja tuloksia Auringon atmosfäärissä.

Todettakoon vielä eräs mielenkiintoinen yhteys:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma T^4(\tau) = \frac{\mathcal{F}}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) \\ \mathcal{F} = \sigma T_{eff}^4 \end{array}\right\} \Rightarrow T^4(\tau) = \frac{T_{eff}^4}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right)$$

Kun $\tau = 2/3$, niin $\boxed{T\left(\tau = \frac{2}{3}\right) = T_{eff}}$

eli sama kuin Eddington-Barbierin relaatio: $S_\nu\left(\tau = \frac{2}{3}\right) = \mathcal{F}(0)$

Tämän perusteella kutsutaan arvoa $\tau = 2/3$ efektiiviseksi optiseksi syvyydeksi.

c) Schuster-Schwarzschildin menetelmä (two-stream menetelmä)

Fysikaaliset oletukset:

$$\left.\begin{array}{l}\text{- säteilytasapaino}\\ \text{- harmaa atmosfääri}\end{array}\right\} \Rightarrow S = \mathcal{J} \quad \text{sekä } \kappa = \text{vakio)}$$

Integroimalla säteilynkuljetusyhtälö yli kaikkien taajuuksien saadaan

$$\cos\theta \, \frac{dI(\tau,\theta)}{d\tau} = I(\tau,\theta) - \underbrace{\mathcal{J}(\tau)}_{\frac{1}{4\pi}\oint I(\tau,\theta)\,d\omega}$$

Tämä integraali-differentiaaliyhtälö voidaan muokata tavalliseksi differentiaaliyhtälöpariksi jakamalla intensiteetti kahteen komponettiin :

$$\begin{cases} I^+(\tau) = \int_0^{\pi/2} I(\tau,\theta)\sin\theta\, d\theta \\ I^-(\tau) = \int_{\pi/2}^{\pi} I(\tau,\theta)\sin\theta\, d\theta \cdot \end{cases}$$

I^+ pinnasta ulos tuleva keskimääräinen intensiteetti

sisään menevä keskimääräinen intensiteetti I^-

Tällöin $\mathcal{J} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} I \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{2\pi}{4\pi}\int_0^{\pi} I\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2}(I^+ + I^-)$

Säteilynkuljetusyhtälö voidaan siten esittää seuraavasti:

$$\frac{d}{d\tau}(I\cos\theta) = I(\tau,\theta) - \frac{1}{2}(I^+ + I^-) \qquad \Big| \quad 1)\ \int_0^{\pi/2} \ldots \sin\theta\, d\theta \ ^{*)} \qquad 2)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ldots \sin\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{dI^+}{d\tau} = I^+(\tau) - \frac{1}{2}(I^+ + I^-) & (1) \\ -\frac{1}{2}\frac{dI^-}{d\tau} = I^-(\tau) - \frac{1}{2}(I^+ + I^-) & (2) \end{cases}$$

*) Huom.: Vasen puoli : $\frac{d}{d\tau}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot I \sin\theta\, d\theta = \underbrace{\overline{\cos\theta}}_{\frac{1}{2}} \, \frac{dI^+}{d\tau}$

Tämän mukaan keskimääräinen ulos tuleva säteilyintensiteetti havaitaan suunnassa $\cos\theta = 1/2 \iff \theta = 60^\circ$.

$$(1)+(2) \Rightarrow \frac{dI^+ - dI^-}{d\tau} = 0$$

$$\mathcal{F} = \int I \cos\theta \, d\omega = 2\pi \Big[I^+ \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta}_{=\frac{1}{2}} + I^- \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta}_{=-\frac{1}{2}} \Big]$$

$$\mathcal{F} = \pi \underbrace{(I^+ - I^-)}_{F} = \pi F$$

F (muodollinen merkintä)

$$\Rightarrow \frac{dF}{d\tau} = 0$$

$$\Rightarrow F = \text{vakio}$$

aivan kuten säteilytasapaino edellyttää

$$(1)-(2) \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{dI^+ + dI^-}{d\tau} = \underbrace{I^+ - I^-}_{F}$$

$$dI^+ + dI^- = 2F\, d\tau \quad \Big| \int$$

$$\Rightarrow I^+ + I^- = 2F\tau + C$$

Reunaehto:

$$\left.\begin{aligned} I^+ + I^- &= 2F\tau + C \\ I^-(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} I^+ &= C \\ F &= I^+ - \underbrace{I^-}_{=0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = F$$

Säteilytasapainossa $\quad S = J = \dfrac{I^+ + I^-}{2} = \dfrac{2F\tau + F}{2} = \dfrac{F}{2}(1+2\tau) \quad \Big| \; F = \dfrac{\mathcal{F}}{\pi}$

$$S = \frac{\mathcal{F}}{2\pi}(1+2\tau)$$

Sijoittamalla tämä lähdefunktio säteilynkuljetusyhtälön määräämään intensiteettilausekkeeseen saadaan

$$I(0,\theta) = \int_0^\infty \underbrace{S(\tau)}_{\frac{\mathcal{F}}{2\pi}(1+2\tau)} e^{-\tau \sec\theta} \sec\theta \, d\tau$$

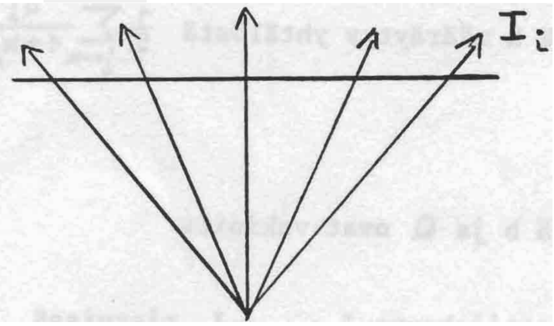
$$\boxed{I(0,\theta) = \frac{\mathcal{F}}{2\pi}\left(1 + 2\cos\theta\right)}$$

SÄTEILYNKULJETUSYHTÄLÖN RATKAISU
SCHUSTER-SCHWARZSCHILDIN
APPROKSIMAATIOSSA (v. 1905)

Tämä ratkaisu poikkeaa Eddingtonin ratkaisusta vain viimeisessä termissä: $2 \times \cos\theta$ on Eddingtonilla $(3/2) \times \cos\theta$.

d) Chandrasekharin menetelmä

Chandrasekharin "method of discrete ordinates" on Schuster-Schwarzchildin menetelmän yleistys: intensiteetti jaetaan osiin (i kappaletta) ja näitä intensiteettiosia I_i tarkastellaan suunnissa θ_i.



Fysikaaliset oletukset:

- harmaa atmosfääri
- säteilytasapaino

$$\left.\begin{array}{l}\text{- harmaa atmosfääri}\\ \text{- säteilytasapaino}\end{array}\right\} \Rightarrow S = J = \frac{2\pi}{4\pi}\int_{1}^{-1} I(\cos\theta)\,\underbrace{\sin\theta\, d\theta}_{-d(\cos\theta)}$$

Säteilynkuljetusyhtälönä on integraali-differentiaaliyhtälö :

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - \frac{1}{2}\int_{-1} I(\tau,\mu)\, d\mu \quad \text{, missä } \mu = \cos\theta$$

Suurimman vaikeuden yhtälön ratkaisemisessa tuottaa kulman yli otettu integraali. Likimääräisesti se voidaan esittää Gaussin summana :

$$\int_{-1}^{1} I(\tau,\mu)\, d\mu \approx \sum_{j=-n}^{n} a_j\, I(\tau,\mu_j)$$

Gaussin numeerisen integrointimenetelmän tarkkuus riippuu sekä kertaluvusta n että tarkasteluvälin jakopisteiden valinasta. Tasavälisen jaon sijasta valitaan jakopisteet siten, että ne ovat Legendren polynomin $P_{2n}(\cos\theta)$ nollakohtia.

Säteilynkuljetusyhtälöksi saadaan täten lineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä, jonka kertaluku on 2n

$$\mu_i \frac{dI_i}{d\tau} = I_i - \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n} a_j I_j \qquad (i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n)$$

(Huom. Kun tarkastellaan pinnan sisään menevää säteilyä, on $i < 0$)
Näillä differentiaaliyhtälöillä on erikoisratkaisut

$$\boxed{I_i = \frac{1}{1+k\mu_i} e^{-k\tau}}$$, missä k määräytyy yhtälöstä $\frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n}\frac{a_j}{1+k\mu_j} = 1$

sekä yksityisratkaisu

$$\boxed{I_i = b(Q + \tau + \mu_i)}$$, missä b ja Q ovat vakioita

Ratkaisuna saadaan siis intensiteettijakauma $I_{-n},\dots,I_n$ tietyissä suunnissa $\theta_{-n},\dots,\theta_n$.

Tarkempi esitys edellä hahmotetulle menetelmälle löytyy esim. kijoista:

S. Chandrasekhar: Radiative Transfer, Oxford 1950

V.V. Sobolev :A Treatise of Radiative Transfer. Van Nostrand Company 1963 (luku 2.3)

D. Mihalas: Stellar Atmospheres. Freeman and Freeman 1970 (luku 2.3)

HUOM. 1 Chandrasekharin menetelmä antaa harmaalle atmosfäärille sekä likimääräisen ratkaisun (sarjan summausindeksi n äärellinen) että tarkan ratkaisun ($n \to \infty$).

HUOM. 2 1. kertaluvun approksimaatiossa (n=1): $a_1 = a_{-1} = 1$

$$\mu_1 = -\mu_{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

jolloin säteilynkuljetusyhtälö

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dI_1}{d\tau} = I_1 - \frac{1}{2}(I_1 + I_{-1}) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dI_{-1}}{d\tau} = I_{-1} - \frac{1}{2}(I_1 + I_{-1}) \end{cases}$$

vastaa Schuster-Schwarzchildin säteilynkuljetusyhtälöä sillä erolla, että Chandrasekharilla on $\cos\theta = 1/2$ tilalla $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$.

2.3 KAASUMAISEN TILAN FYSIIKKAA TÄHTIEN ATMOSFÄÄREISSÄ

Tähtitieteellisissä kohteissa on kaasumainen tila vallitseva aineen olomuoto: tähdet ovat kaasupalloja, planeettojen atmosfäärit ovat kaasua, tähtienvälisestä aineesta 99% on kaasua.

2.3.1 Ideaalikaasun tilanyhtälö

Ideaalikaasun tilanyhtälö on voimassa tähdissä paitsi mahdollisesti degeneroituneissa keskusosissa (degeneroituneen kaasun painetta käsitellään luvussa 3).

$$\boxed{PV = \mathcal{N}RT}$$ IDEAALIKAASUN TILANYHTÄLÖ

missä $\mathcal{N}$= moolien lukumäärä

R= yleinen kaasuvakio = 8.314×10^{7} erg/K mol = 8.314 J/K mol

Yhdelle kaasumoolille:

$$PV = RT$$ | : N_o ($N_o = 6.025\times10^{23}$ = Avogadron luku =hiukkasten lukumäärä/mooli)

$$P\frac{V}{N_o} = \frac{R}{N_o}T$$ | $\frac{R}{N_o} = k = 1.380\times10^{-16}$ erg/K = 1.380×10^{-23} J/K = Boltzmannin vakio

$$P = \frac{N_o}{V}kT$$ | merkitään $\frac{N_o}{V}$ = N = 1 moolin molekyylien lukumäärä/cm^3

$$\boxed{P = NkT}$$ TILANYHTÄLÖ YHDELLE KAASUMOOLILLE

Paineen riippuvuus lämpötilasta ja tiheydestä:

$$PV = \mathcal{N}RT$$

$$PV = \frac{M}{\mu}RT$$

$$P = \frac{M}{V}\cdot\frac{1}{\mu}RT$$

= N m = 1 moolin massa

m = molekyylin massa

$$\varrho = \frac{M}{V}$$

$$\boxed{P = \frac{\varrho RT}{\mu}}$$

$$\frac{R}{\mu} = \frac{N_0 k}{N_0 m} = \frac{k}{m}$$

$$\boxed{P = \frac{\varrho kT}{m}}$$

, missä m = molekyylin massa

Kaasuseoksen tapauksessa on

$$\boxed{P = \sum P_i = kT\sum N_i}$$

missä P_i = komponentin i aiheuttama osapaine.

Merkitään $\bar{A} = \frac{\sum N_i A_i}{\sum N_i}$ = seoksen keksimääräinen hiukkaspaino atomimassayksiköissä

ESIM. Vetykaasun keskimääräinen hiukkaspaino eri lämpötiloissa:

T		$\bar{A}$
3000 K	H_2	2
3000 K	H + H	1
10000 K	$p^+ + p^+ + e^- + e^-$	0.5

Eri hiukkaslajien N_i summan määrittämiseksi merkitään:

X = vedyn massaosuus $(0 < X \leq 1)$

Y = heliumin massaosuus

Z = "metallien" massaosuus (metalleiksi kutsutaan alkuaineita, joiden $A \geq 5$)

$\frac{\bar{A}}{2} \approx$ protonien lukumäärä metalliatomissa = elektronien lukumäärä

Ionisoituneessa tilassa ovat eri hiukkaslajien hiukkaslukumäärät seuraavat:

	ionien lukumäärä/cm^3	elektronien lukumäärä/cm^3	$\sum N_i$
vety	$\frac{X\cdot\rho}{m_H} = \frac{n m_H}{M}\cdot\frac{M}{V}\cdot\frac{1}{m_H} = \frac{n}{V}$	$\frac{X\cdot\rho}{m_H}$	$2\,\frac{X\cdot\rho}{m_H}$
helium	$\frac{Y\cdot\rho}{m_{He}} = \frac{Y\cdot\rho}{4m_H}$	$2\,\frac{Y\cdot\rho}{m_{He}} = \frac{Y\cdot\rho}{2m_H}$	$\frac{3}{4}\,\frac{Y\cdot\rho}{m_H}$
"metallit"	$\frac{Z\cdot\rho}{\bar{A}\cdot m_H}$	$\frac{\bar{A}}{2}\,\frac{Z\cdot\rho}{\bar{A}\cdot m_H} = \frac{Z\cdot\rho}{2m_H}$	$1+\frac{Z\cdot\rho}{2m_H} \approx \frac{1}{2}\,\frac{Z\cdot\rho}{m_H}$

$$\Rightarrow N = \sum N_i = \frac{\rho}{m_H}\left(2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P = NkT = \frac{\rho kT}{m_H}\left(2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z\right)}$$ TILANYHTÄLÖ TÄYSIN IONISOITUNEELLE KAASUSEOKSELLE

<u>HUOM.</u> Kokonaispaine on kaasunpaineen ja säteilypaineen summa:

$$\boxed{P_{tot} = P_g + P_r}$$

2.3.2 Kaasun adiabaattinen tilanyhtälö

a) Systeemin ominaislämpö

Energian säilymislain lämpöopillinen muoto on

$$dU = \text{đ}Q + \text{đ}W$$

$$\Leftrightarrow \text{đ}Q = dU - \text{đ}W$$

$$\text{đ}Q = dU + PdV$$

, missä dQ = systeemiin tuotu lämpöenergia

dW = systeemiin tehty työ = -PdV (dW = PdV, kun kaasu itse suorittaa työn)

dU = sisäisen energian muutos

Merkintä đ ilmoittaa, että kysymyksessä ei ole kokonaisdifferentiaali (ts. vain alku- ja lopputilasta riippuva fkt.), vaan prosessista riippuva suure.

Systeemin ominaislämpö:

$$\boxed{C = \frac{\text{đ}Q}{dT}}$$

Kun V = vakio : $C_v = \left[\frac{\text{đ}Q}{dT}\right]_v = \frac{dU}{dT}$

$$U = n \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \mathcal{N} RT$$

$$\frac{dU}{dT} = C_v = \frac{3}{2} \mathcal{N} R$$

Kun P = vakio : $C_p = \left[\frac{\text{đ}Q}{dT}\right]_p = \frac{dU}{dT} + \frac{d}{dT}(PdV)$

$$PV = \mathcal{N} RT$$

$$PdV + V\underbrace{dP}_{=0} = \mathcal{N} R\, dT$$

$$PdV = \mathcal{N} RT$$

$$C_p = \underbrace{\frac{dU}{dT}}_{C_v} + \mathcal{N} R$$

$$\boxed{C_p - C_v = \mathcal{N} R}$$

, missä $\mathcal{N}$ = moolien lukumäärä

b) Adiabaattinen tilanyhtälö

Adiabaattisessa muutoksessa $\boxed{\text{đ}Q = 0}$, jolloin

$$dU + P\,dV = 0 \qquad \Big|\ 1\ \text{moolille:}\ P = \frac{RT}{V}$$

$$c_V\,dT + RT\,\frac{dV}{V} = 0 \qquad \Big|\ R = c_P - c_V \quad \Big|\ :T$$

$$c_V\,\frac{dT}{T} = -(c_P - c_V)\,\frac{dV}{V} \qquad \Big|\ :c_V \quad \Big|\ \int$$

$$\ln T = -(\gamma - 1)\ln V + \text{const}$$

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \begin{cases} 5/3 & \text{neutraalille 1-atomiselle kaasulle tai täysin ionisoituneelle kaasulle} \\ 7/5 & \text{kaksiatomiselle kaasulle} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{T V^{\gamma-1} = \text{const}} \\ T = \dfrac{PV}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{P V^{\gamma} = \text{const}} \\ V^{\gamma} = \left(\dfrac{RT}{P}\right)^{\gamma} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{P^{1-\gamma} T^{\gamma} = \text{const}}$$

Näistä kaasun adiabaattisen tilanyhtälön eri esitysmuodoista käytetään jatkossa eniten yhtälöä

$$\boxed{P V^{\gamma} = \text{vakio}}$$

KAASUN ADIABAATTINEN TILANYHTÄLÖ

ESIM. Määritä γ, kun paine on sähkömagneettisen säteilyn aiheuttama.

$$đQ = dU + P\,dV$$

U = säteilyn energia

U = uV, missä u = säteilytiheys = aT^4

= säteilyenergia/cm^3

$$U = aT^4 V$$

$$dU = 4aT^3 V\,dT + aT^4\,dV$$

$$P = \frac{u}{3} = \frac{1}{3}aT^4$$

$$đQ = 4aT^3V\,dT + \underbrace{aT^4\,dV + \tfrac{1}{3}aT^4\,dV}_{\frac{4}{3}aT^4\,dV\ =\ 4P\,dV} = 0$$

adiabaattisessa muutoksessa

$$3\cdot\frac{4}{3}aT^3V\,dT + 4P\,dV = 0 \qquad \Big|\ \begin{array}{l} P = \frac{1}{3}aT^4 \\ dP = \frac{4}{3}aT^3\,dT \end{array}$$

$$3V\,dP + 4P\,dV = 0$$

$$3\,\frac{dP}{P} = -4\,\frac{dV}{V}$$

$$P \sim V^{-4/3}$$

$$PV^{4/3} = \text{const}$$

joten $\gamma = \frac{4}{3}$

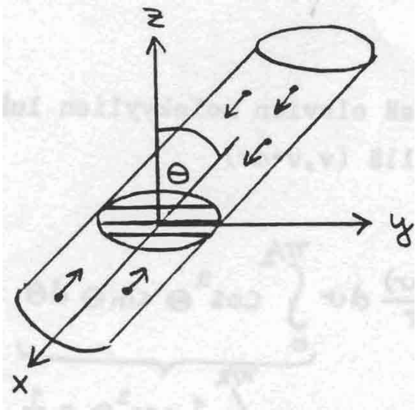
Interstellaarisessa avaruudessa $4/3 < \gamma < 5/3$ riipuen siitä, määrääkö säteily vai kaasu paineen.

Adiabaattista tilanyhtälöä on käytettävä tarkasteltaessa mm. tähtien konvektiota (massavirtausta) tai interstellaarisen pilven kuumenemista, kun se äkillisesti kutistuu esim. supernovaräjähdyksen synnyttämän iskurintaman johdosta.

2.3.3 Kaasun paineen ja lämpötilan kineettinen tulkinta

Paine voidaan selittää kineettisen kaausteorian pohjalta. Kaasunpaine ilmoittaa molekyylien liikemäärän muutoksen aikayksikössä hiukkasten liikkuessa yksikköpinta-alan läpi, joka on kohtisuorasti molekyylien liikesuuntaan nähden:

$$P_z = \frac{d(dp_z/dt)}{dA}, \text{ missä } p_z \perp dA$$



Merkitään

$n(\theta, \phi, v)$ = niitten molekyylien lukumäärä/cm^{3}sr, joilla nopeus välissä $(v, v+dv) = \frac{\text{lkm}}{dV \cdot d\omega \cdot dv}$

$v \cos \theta$ = tarkasteltavaa pinta-alkiota vasten kohtisuora nopeuskomponentti

$dV = dA \cdot dt \cdot v \cos\Theta$ = tilavuusalkio, jossa ovat kaikki ne molekyylit, jotka aikayksikössä "iskeytyvät" kohtisuoraan pintaan dA

$\int\limits_v \int\limits_V \int\limits_\omega n(\Theta,\phi,v)\,dv\,dV\,d\omega$ = yksikköpinta-alaan kohtisuoraan "iskeytyvien" hiukkasten lukumäärä aikayksikössä

$$= \iiint n(\Theta,\phi,v) \cdot v \cdot \cos\Theta \underbrace{\sin\Theta d\Theta\, d\phi}_{d\omega} dv \underbrace{dA}_{1\,cm^2} \cdot \underbrace{dt}_{1\,s}$$

Tällöin paine pinta-alkiota vasten on

$$P_z = \text{hiukkasten lkm/s} \times \left[m\vec{v}\cos\Theta - (-m\vec{v}\cos\Theta) \right]$$

$$P_z = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (2mv\cos\Theta) \cdot n(\Theta,\phi,v) \cdot v\cos\Theta \sin\Theta\, d\phi\, d\Theta\, dv$$

Jos molekyylien nopeusjakautuma on isotrooppinen, on

$$n(\Theta,\phi,v) = \frac{1}{4\pi} n(v)\, dv$$

missä n(v) = kuutiosenttimetrissä olevien molekyylien lukumäärä, joilla nopeus välillä (v,v+dv)

$$\Longrightarrow \quad P = 2\pi \cdot 2m \int_0^\infty v^2 \frac{n(v)}{4\pi} dv \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2\Theta \sin\Theta\, d\Theta}_{\Big/_0^{\pi/2} -\frac{1}{3}\cos^3\Theta \,=\, \frac{1}{3}}$$

$$P = \frac{1}{3} m \int_0^\infty v^2 \cdot n(v)\, dv$$

Keskiarvon määritelmän mukaan

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^\infty v^2 \cdot n(v)\, dv}{\int_0^\infty n(v)\, dv}$$

$$\Longrightarrow \int_0^\infty v^2 \cdot n(v)\, dv = \overline{v^2} \underbrace{\int_0^\infty n(v)\, dv}_{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{P = \frac{1}{3} N m \overline{v^2}}$$

, missä N = molekyylien lkm/cm³

Yhdistämällä

$$\left.\begin{aligned} P &= NkT \\ P &= \tfrac{1}{3} N m \overline{v^2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{3} m \overline{v^2} = kT \quad \Big| \cdot \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT}$$

YHDEN MOLEKYYLIN
KESKIMÄÄRÄINEN
LIIKE-ENERGIA

2.3.4 Maxwellin nopeusjakautuma

Oletetaan seuraavassa, että hiukkasten faasitiheys $F(x,y,z,u,v,w,t)$ ei riipu paikasta (x,y,z), ajasta eikä nopeuden suunnasta $(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$. Tällöin voidaan faasitiheys hajo~~i~~ttaa ajasta ja paikasta riippuvaan funktioon $f_1(x,y,z,t)$ sekä nopeudesta riippuvaan funktioon $f_2(v^2)$.

$$F(r,t,v^2) = f_1(x,y,z,t) \cdot f_2(u^2+v^2+w^2)$$

Jos lisäksi oletetaan, että nopeuskomponentit u,v,w ovat toisistaan riippumattomia, voidaan hiukkasten nopeusjakautuma esittää muodossa

$$f(u^2+v^2+w^2) = g(u^2) \cdot g(v^2) \cdot g(w^2)$$

Tämän funktionaaliyhtälön ratkaisut ovat muotoa

$$g(u^2) = A\,e^{-\lambda u^2}$$

$$g(v^2) = A\,e^{-\lambda v^2}$$

$$g(w^2) = A\,e^{-\lambda w^2}$$

Vakiot A ja λ sekä edelläolevan ratkaisun muoto saadaan seuraavalla typistetyllä tarkastelulla. Yksinkertaisuuden vuoksi tarkastellaan edelläolevan funktionaaliyhtälön kaksidimesionaalista muotoa:

$$H(x+y) = G(x)\cdot G(y) \qquad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dH(x+y)}{d(x+y)}\underbrace{\frac{\partial(x+y)}{\partial x}}_{=1} = \frac{dG(x)}{dx}\cdot G(y)$$

eli

$$H'(x+y) = G'(x)\cdot G(y) \qquad \Big| : H(x+y)$$

$$\frac{H'(x+y)}{H(x+y)} = \frac{G'(x)}{G(x)}$$

Vastaavasti saadaan y:n suhteen derivoimalla

$$\frac{H'(x+y)}{H(x+y)} = \frac{G'(y)}{G(y)}$$

$$\Rightarrow \frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{G'(y)}{G(y)}$$

Koska saadussa yhtälössä vasen puoli riippuu vain x:stä ja oikea puoli vain y:stä, on yhtälön molempien puolien oltava vakio, jota merkitään $-\lambda$:lla.

$$\Rightarrow \frac{dG(x)}{G(x)} = -\lambda\, dx \quad \Rightarrow \quad G(x) = A e^{-\lambda x}$$

vastaavasti : $\quad G(y) = A e^{-\lambda y}$

$$\Rightarrow H(x+y) = A^2\cdot e^{-\lambda(x+y)}$$

Soveltamalla tätä tulosta nopeusjakautumaan saadaan

$$f(v_x^2+v_y^2+v_z^2) = A^3 e^{-\lambda(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$ (3-dimensionaalinen muoto)

$$f(v_x^2) = A\, e^{-\lambda v_x^2}$$ (1-dimensionaalinen muoto)

Vakio A määritetään nopeusjakautuman normitusehdosta

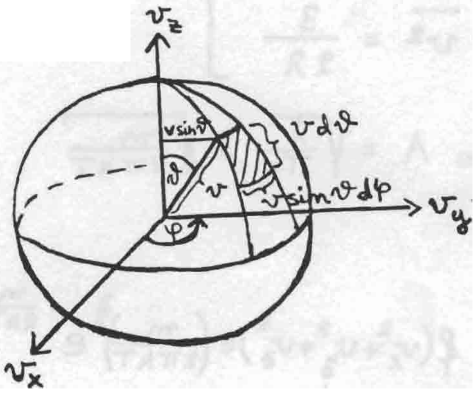
$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f \, dv_x \, dv_y \, dv_z = 1$$

$$A^3 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda v_x^2} dv_x}_{\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda v_y^2} dv_y}_{\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda v_z^2} dv_z}_{\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}} = 1$$

$$\Rightarrow A^3 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$$

Vakio λ saadaan rms-nopeuden (rms:"root mean square" $\sqrt{\overline{v^2}}$) määritelmästä :



$$\overline{v^2} = \frac{\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} v^2 f \, dv_x \, dv_y \, dv_z}{\underbrace{\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f \, dv_x \, dv_y \, dv_z}_{=1}}$$

$$= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} v^2 \cdot f \cdot \underbrace{dv_x \, dv_y \, dv_z}_{v^2 dv \, \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}$$

pallokoordinaatistossa

$$= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} v^4 \cdot f \cdot \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dv$$

$$f = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\lambda v^2}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \oint d\omega = 4\pi$$

$$\overline{v^2} = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi \int_0^\infty v^4 e^{-\lambda v^2} dv$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\overline{v^2} = \frac{3}{2\lambda}$$

$$\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{k+1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

$(k=4)$

$$= \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{5}{2}} \cdot \underbrace{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}_{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}$$

Huom. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Toisaalta

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \overline{v^2} &= \frac{3kT}{m} \\ \overline{v^2} &= \frac{3}{2\lambda} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{m}{2kT}}$$

Täten $A = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$

$$\Rightarrow f(v_x^2+v_y^2+v_z^2) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$ 3-ulott. jakaumafunktio

$$f(v_x^2) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\, e^{-\frac{m}{2kT} v_x^2}$$ 1-ulott. jakaumafunktio

Merkitään $dN(v) = N(v) \cdot dv$ = nopeusvälissä $(v, v+dv)$ olevien molekyylien lukumäärä/cm^3

Huomioimalla nopeuden yleinen jakaumafunktio f saadaan

$$dN(v) = N f(v) dv$$

$$\boxed{dN(v_x) = N \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\, e^{-\frac{m}{2kT} v_x^2} dv_x}$$

MAXWELLIN NOPEUSJAKAUTUMA
(1-ulotteinen tapaus)

missä m = hiukkasen massa

N = hiukkasten lukumäärä tilavuusyksikössä

normitusehto: $\int_{-\infty}^{\infty} f\, dv_x = 1 \iff \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(v_x)}{N}\, dv_x = 1$

Kolmiulotteinen tapaus:

a) suorakulmaisessa koordinaatistossa

$$\boxed{dN(v_x, v_y, v_z) = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\, dv_x dv_y dv_z}$$

MAXWELLIN NOPEUSJAKAUMA (suorakulmaisessa koordinaatistossa)

b) pallokoordinaatistossa

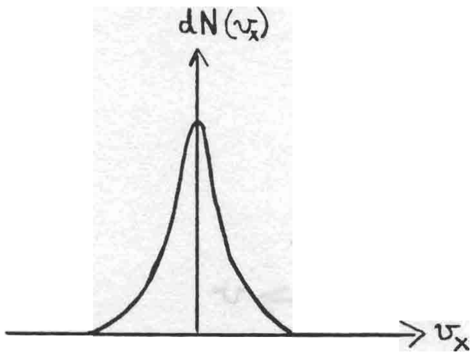
Koska $dv_x\, dv_y\, dv_z = v^2 dv \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, on

$$dN(v) = N(v)\,dv = N \cdot f(v)\,dv$$

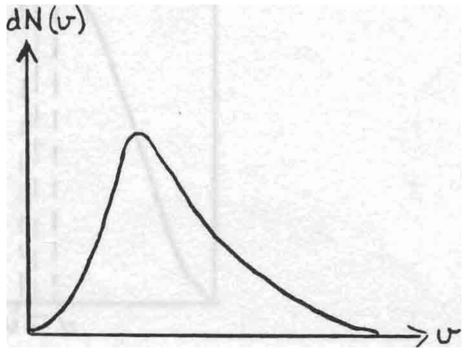
$$= N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}v^2} \cdot v^2 dv \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}_{4\pi}$$

$$\boxed{dN(v) = 4\pi v^2 \cdot N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}v^2}\, dv}$$

MAXWELLIN NOPEUSJAKAUTUMA (pallokoordinaatistossa)



1- ulotteinen nopeusjakautuma esittää Gaussin käyrää



3-ulotteinen nopeusjakauma

HUOM. Maxwellin nopeusjakautuman maksimikohta $\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{N(v)}{N}\right) = 0\right]$ määrittää hiukkasten todennäköisimmän nopeuden α. (osoitus harjoitustehtävänä).

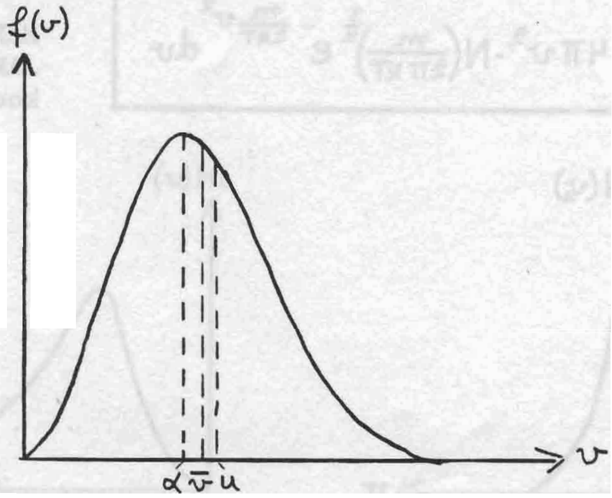
Todennäköisin nopeus $\boxed{\alpha = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}$

Keskinopeus $\bar{v} = \frac{\int v f(v) dv}{\int f(v) dv}$

$$\boxed{\bar{v} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} = 1.13\,\alpha}$$

rms-nopeus $u = \sqrt{\overline{v^2}} = \left[\frac{\int v^2 f(v)\,dv}{\underbrace{\int f(v)\,dv}_{1}}\right]^{1/2}$

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\alpha = 1.25\,\alpha}$$



2.3.5 Boltzmannin hiukkasjakautuma potentiaalikentässä

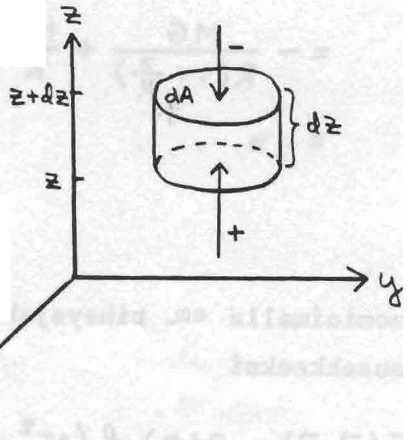
Tarkastellaan seuraavassa potentiaalikentässä V(z) olevaa kaasua, jonka tiheys pienenee korkeuden z kasvaessa.

Merkitään

$F_1(z) = -dM \frac{dV(z)}{dz}$ = alkiota alaspäin vetävä gravitaatiovoima,

missä $dM = \rho\, dAdz$ = tilavuusalkion massa

$F_1(z) = -\rho\, dAdz \frac{dV(z)}{dz}$



Paineen synnyttämä voima tilavuusalkion alapintaan = $P(z)dA = \frac{\rho(z)kT}{m} dA$
missä m = hiukkasen massa.

Paineen synnyttämä voima tilavuusalkion yläpintaan = $P(z+dz)dA = \frac{\rho(z+dz)kT}{m} dA$

Paineen aiheuttama nettovoima ylöspäin on siten

$$F_2(z) = \frac{[\rho(z) - \rho(z+dz)]kT}{m} dA = -\frac{d\rho(z)}{dz} \frac{kT\, dA\, dz}{m}$$

Tasapainon vallitessa $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\rho(z)}{dz} \frac{kT\, dA\, dz}{m} = -\rho(z) dA dz \frac{dV(z)}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho(z)}{\rho(z)} = -\frac{m}{kT} dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{m \cdot \Delta V(z)}{kT}}}$$

TIHEYSJAKAUTUMA POTENTIAALIKENTÄSSÄ V(z)

Tarkasteltaessa esim. planeetan atmosfääriä, jossa atmosfäärin korkeus z on hyvin pieni verrattuna planeetan säteeseen R , on

$$\Delta V = V(R+z) - V(R) = -\frac{MG}{R+z} - \left(-\frac{MG}{R}\right)$$

$$= -\frac{MG}{R\left(1+\frac{z}{R}\right)} + \frac{MG}{R} = -\frac{MG}{R}\left(1 - \frac{z}{R} + \dots\right) + \frac{MG}{R} = \frac{MG}{R^2} z$$

$$= gz$$

Huomioimalla em. tiheysjakautuma saadaan kaasun faasitiheyden lausekkeeksi

$$F(\vec{r},\vec{v}) = \rho(z)\, f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \qquad \Big|\ \text{Sij. } \rho \text{ ja } f$$

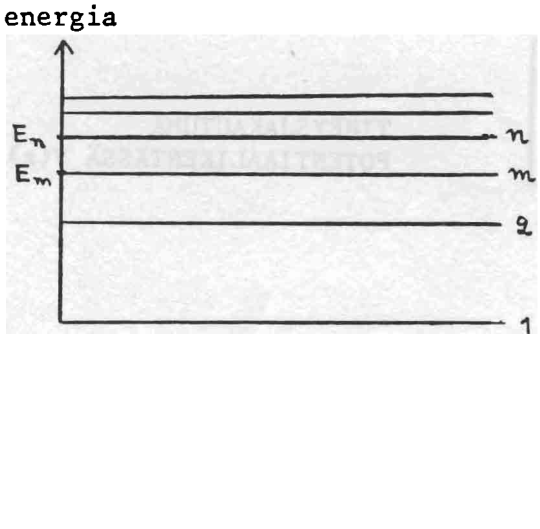
$$= \rho_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{mv^2}{2kT} + \frac{m\Delta V(z)}{kT}\right)}$$

$$\boxed{F(\vec{r},\vec{v}) = \rho_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E}{kT}}}$$

HIUKKASTEN PAIKKA- JA NOPEUSJAKAUTUMA

2.3.6 Boltzmannin laki atomien viritystilojen miehityksille

Sidoselektronien lukumäärä atomin eri viritystiloissa riippuu atomin potentiaalikentästä sekä lämpötilasta.



Viritystilojen n ja m miehitysluvuille johti Boltzmann yhtälön

$$\boxed{\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m}\, e^{-(E_n - E_m)/kT}}$$ BOLTZMANNIN LAKI

missä

N_n = viritystilassa n olevien atomien lukumäärä
N_m = viritystilassa m olevien atomien lukumäärä
} ns. miehitysluvut

g = tietyn energiatilan statistinen paino. Esim. vedylle $g_n = 2n^2$

Merkitsemällä $\chi_n = E_n - E_1$ = tilan n viritysenergia saadaan

$$\frac{N_n}{N_1} = \frac{g_n}{g_1}\, e^{-\chi_n/kT}$$

$$\Rightarrow N_n = \frac{N_1}{g_1}\, g_n\, e^{-\chi_n/kT}$$

$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n + \ldots$
=atomien kokonaislukumäärä

$$\Rightarrow N = \frac{N_1}{g_1} \underbrace{\sum g_n\, e^{-\chi_n/kT}}_{\text{partitiofunktio } u(T)}$$

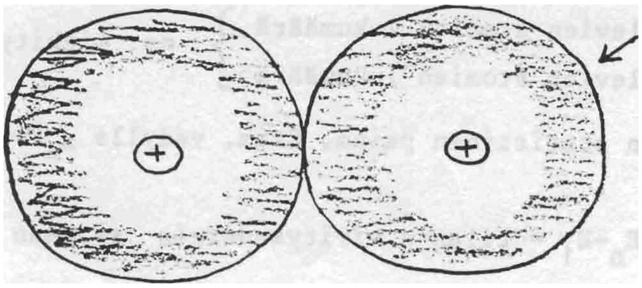
$$N = \frac{N_1}{g_1} \cdot u(T) \quad \Rightarrow \quad \frac{N_1}{N} = \frac{g_1}{u(T)}$$

$$\Rightarrow \frac{N_n}{N} = \frac{N_n}{N_1} \cdot \frac{N_1}{N} = \frac{g_n}{g_1}\, e^{-\chi_n/kT} \cdot \frac{g_1}{u(T)}$$

$$\boxed{\frac{N_n}{N} = \frac{g_n}{u(T)}\, e^{-\chi_n/kT}}$$

missä N = atomien kokonaislukumäärä

HUOM. Partitiofunktiota laskettaessa on summa katkaistava tietystä kohdasta - viimeistään silloin, kun pääkvanttilukua n vastaavat Bohrin säteet ovat ytimien välimatkojen suuruusluokkaa ja sähköinen repulsio voimistuu. Tämän vuoksi partitiofunktion arvo riippuu kaasun tiheydestä.



elektroniverho

ESIM. Vetyatomille saadaan 10000K lämpötilassa seuraavat miehitysluvut

$$g_n = 2n^2$$

$\chi_n = hR_H\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$, missä Rydbergin vakio on Hz-yksiköissä :

$$R_H = 3.29 \times 10^{15}\ \mathrm{Hz}$$

Huom. normaalisti Rydbergin vakio ilmoitetaan pituusyksikköä kohti :

$h\nu = hc\frac{1}{\lambda} = hc\,R_M\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$, missä $R_M = \frac{R_\infty}{1+\frac{m_e}{M}}$

Vedylle $R_H = 109667.6\ \frac{1}{cm} = R_\infty$

$$u(T) = \sum_{n=1}^{n'} 2n^2 e^{-hR_H[Hz]\left(1-\frac{1}{n'^2}\right)/kT}$$

$u(10000\,K) \approx 2$ (vedylle)

Kun T = 10000K :

n	$2n^2$	$1-\frac{1}{n^2}$	$e^{-\chi_n/kT}$	$\frac{N_n}{N} = \frac{2n^2}{u(10000K)} e^{-\chi_n/kT}$
1	2	0	2	~ 1
2	8	0.75	5.78×10^{-5}	2.9×10^{-5}
3	18	0.889	1.45×10^{-5}	7.2×10^{-6}

Todetaan, että 10000 K lämpötilassa suurin osa vetyatomeista on perustilassa (kts. alla olevaa taulukkoa).

Table Relative Populations of Levels in Hydrogen (P_e = 10 dyne cm^{-2}).

T	$\frac{N_{I,2}}{N_{I,1}}$	$\frac{N_{I,3}}{N_{I,1}}$
4,000°K	5.62×10^{-13}	5.25×10^{-15}
6,000	1.08×10^{-8}	6.28×10^{-10}
8,000	1.50×10^{-6}	2.17×10^{-7}
10,000	2.89×10^{-5}	7.25×10^{-6}
12,000	2.08×10^{-4}	7.52×10^{-5}
14,000	8.51×10^{-4}	4.00×10^{-4}
16,000	2.45×10^{-3}	1.40×10^{-3}
18,000	5.57×10^{-3}	3.71×10^{-3}
20,000	1.08×10^{-2}	8.08×10^{-3}

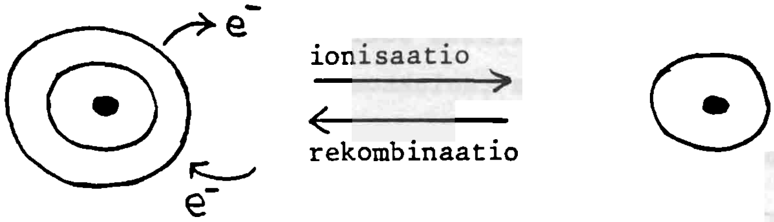
Table Logarithms of Partition Functions.* [From T. L. Swihart, 1968 (6), pp. 274–275, based on unpublished calculations of A. N. Cox.]

The following ions have partition functions which are nearly independent of temperature and electron pressure as long as the abundance of the ion is not negligibly small:

ION	log u_i	ION	log u_i	ION	log u_i
H I	0.30	O II	0.60	Mg III	0.00
He I	0.00	O III	0.95	Al II	0.00
He II	0.30	Ne I	0.00	Al III	0.30
Li II	0.00	Ne II	0.78	Si II	0.78
Li III	0.30	Ne III	0.95	Si III	0.00
C II	0.78	Na II	0.00	K II	0.00
C III	0.00	Na III	0.78	K III	0.78
N II	0.96	Mg II	0.30	Ca III	0.00
N III	0.78				

2.3.7 Ionisaatioyhtälö (Sahan yhtälö)

Megh Nad Saha johti 1920 statistisen fysiikan menetelmin tähtien atmosfäärin virityksen ja ionisaation teorian. Ionisaatioteorian perusideana on, että tasapainotilassa ionisaatioiden lukumäärä sekunnissa on yhtäsuuri kuin rekombinaatioiden lukumäärä sekunnissa.



ionisaatioaste i   ionisaatioaste i+1

Yksinkertaisuuden vuoksi tarkastellaan vain vierekkäisiä ionis.asteita i ja i+1

Ionisaatioiden lukumäärä/s: $\frac{dN(i \to i+1)}{dt} = N_i \cdot f_1(T, \chi_{ion})$

Rekombinaatioiden lukumäärä/s : $\frac{dN(i+1 \to i)}{dt} = N_{i+1} \cdot N_e \cdot f_2(T, \chi_{ion})$

Tasapainotilassa: $\frac{dN(i \to i+1)}{dt} = \frac{dN(i+1 \to i)}{dt}$

$$\Longrightarrow \frac{N_{i+1} \cdot N_e}{N_i} = \frac{f_1}{f_2} = g(T, \chi_{ion})$$

Saha sai g-funktion lausekkeeksi

$$\boxed{\frac{N_{i+1} \cdot N_e}{N_i} = \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} \cdot \frac{2u_{i+1}(T)}{u_i(T)} e^{-\frac{\chi_i}{kT}}}$$ SAHAN YHTÄLÖ

missä N_e = elektronitiheys $[cm^{-3}]$

m = elektronin massa

χ_i = ionisaatioenergia asteelta i asteelle i+1

$$u_i(T) = \sum g_{i,n}\, e^{-(\chi_{i,n} - \chi_{i,1})/kT}$$

Huom. Ensimmäinen alaindeksi ilmoittaa ionisaatioasteen ja jälkimmäinen alaindeksi viritystilan. Partitiofunktion u_{i+1} edessä oleva luku 2 on vapaitten elektronien statistinen paino.

Sahan yhtälössä käytetään usein elektronipainetta P_e elektronitiheyden asemesta:

$$P_e = N_e kT \Rightarrow N_e = \frac{P_e}{kT}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{N_{i+1} P_e}{N_i} = \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3} \cdot (kT)^{5/2} \cdot \frac{2\, u_{i+1}(T)}{u_i(T)}\, e^{-\chi_i/kT}}$$

Mikäli e-kantainen potenssi halutaan muuttaa 10-kantaiseksi, on

$$e^{-\chi_i/kT} = 10^{-\frac{\lg e}{k} \cdot \frac{\chi_i}{T}} = 10^{-\frac{5040}{T} \cdot \chi_i [eV]}$$

Sijoittamalla vakioitten lukuarvot, saadaan Sahan yhtälö muotoon

$$\frac{N_{i+1} \cdot P_e}{N_i} = 0.331 \cdot T^{5/2} \cdot \frac{2\, u_{i+1}(T)}{u_i(T)} \cdot 10^{-\frac{5040}{T} \chi_i [eV]}$$

$$\lg \frac{N_{i+1} \cdot P_e}{N_i} = -0.48 + \frac{5}{2} \lg T + \lg \frac{2\, u_{i+1}(T)}{u_i(T)} - \frac{5040}{T} \chi_i [eV]$$

HUOM. Elektronipaineen yksikkönä käytettävä dyn/cm^2

Astrofysiikassa käytetään seuraavia merkintöjä:

	neutraali atomi	1. kerran ionisoitunut	2 kertaa ionisoitunut	r kertaa ionisoitunut
Vapaita elektroneja atomia kohden	0	1	2	r
Ionisaatioenergia	χ_0	χ_1	χ_2	χ_r
Ionin merkintä (esimerkkinä Rauta Fe)	Fe I	Fe II	Fe III	$Fe^{(r+1)}$
Kaikkien atomien lkm. ko. ionisaatioasteella	N_0	N_1	N_2	N_r
Perustilassa olevien ionien lukumäärä	$N_{0,1}$	$N_{1,1}$	$N_{2,1}$	$N_{r,1}$
Viritystilassa s olevien ionien lkm.	$N_{0,s}$	$N_{1,s}$	$N_{2,s}$	$N_{r,s}$

Alkuaineitten partitiofunktiot eri lämpötiloissa ja elektronipaineessa esitetty alla olevassa taulukossa. Seuraavalla sivulla ovat alkuaineitten ionisaatiopotentiaalit.

The following table gives log u_i for other ions as a function of temperature and electron pressure:

ION	log P_e	TEMPERATURE (°K) 5,040	7,200	10,080	ION	log P_e	TEMPERATURE (°K) 5,040	7,200	10,080
Li I	0	0.33	0.75	1.68	Si I	0	0.97	1.00	1.21
	2	0.32	0.44	0.91		2	0.96	0.99	1.06
	4	0.32	0.37	0.51		4	0.96	0.98	1.04
C I	0	0.96	0.98	1.01	K I	0	0.43	1.16	2.02
	2	0.95	0.98	1.01		2	0.35	0.62	1.19
	4	0.95	0.98	0.99		4	0.33	0.45	0.69
N I	0	0.60	0.62	0.66	Ca I	0	0.08	0.46	1.36
	2	0.60	0.62	0.66		2	0.07	0.30	0.79
	4	0.60	0.62	0.66		4	0.04	0.27	0.62
O I	0	0.95	0.95	0.97	Ca II	0	0.34	0.43	0.57
	2	0.95	0.96	0.97		2	0.33	0.42	0.56
	4	0.95	0.96	0.97		4	0.31	0.38	0.52
Na I	0	0.32	0.68	1.53	Fe I	0	1.47	1.85	2.83
	2	0.31	0.41	0.81		2	1.47	1.78	2.36
	4	0.30	0.36	0.51		4	1.47	1.74	2.26
Mg I	0	0.00	0.02	0.30	Fe II	0	1.38	1.55	1.79
	2	0.00	0.00	0.09		2	1.38	1.54	1.79
	4	0.00	0.00	0.06		4	1.38	1.52	1.75
Al I	0	0.78	0.84	1.33	Fe III	0	1.40	1.42	1.49
	2	0.78	0.79	0.91		2	1.40	1.42	1.49
	4	0.78	0.73	0.82		4	1.40	1.42	1.49

* The electron pressure is expressed in dyne cm^{-2}.
Note in proof. A. N. Cox (1972) finds additive corrections as large as 2.3 for some entries.

Table Ionization Potentials.* [C. E. Moore, 1970 (234).]

AT. NO.	ELEMENT	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
		IONIZATION POTENTIAL (ELECTRON VOLTS)										IONIZATION POTENTIAL (ELECTRON VOLTS)									
1	H	13.598																			
2	He	24.587	54.416																		
3	Li	5.392	75.638	122.451																	
4	Be	9.322	18.211	153.893	217.713																
5	B	8.298	25.154	37.930	259.368	340.217															
6	C	11.260	24.383	47.887	64.492	392.077	489.981														
7	N	14.534	29.601	47.448	77.472	97.888	552.057	667.029													
8	O	13.618	35.116	54.934	77.412	113.896	138.116	739.315	871.387												
9	F	17.422	34.970	62.707	87.138	114.240	157.161	185.182	953.886	1,103.089											
10	Ne	21.564	40.962	63.45	97.11	126.21	157.93	207.27	239.09	1,195.797	1,362.164										
11	Na	5.139	47.286	71.64	98.91	138.39	172.15	208.47	264.18	299.87	1,465.091										
12	Mg	7.646	15.035	80.143	109.24	141.26	186.50	224.94	265.90	327.95	367.53	1,648.659									
13	Al	5.986	18.828	28.447	119.99	153.71	190.47	241.43	284.59	330.21	398.57	1,761.802	1,962.613								
14	Si	8.151	16.345	33.492	45.141	166.77	205.05	246.52	303.17	351.10	401.43	442.07	2,085.983	2,304.080							
15	P	10.486	19.725	30.18	51.37	65.023	220.43	263.22	309.41	371.73	424.50	476.06	523.50	2,437.676	2,673.108						
16	S	10.360	23.33	34.83	47.30	72.68	88.049	280.93	328.23	379.10	447.09	479.57	560.41	611.85	2,816.943	3,069.762					
17	Cl	12.967	23.81	39.61	53.46	67.8	97.03	114.193	348.28	400.05	455.62	504.78	564.65	651.63	707.14	3,223.836	3,494.099				
18	Ar	15.759	27.629	40.74	59.81	75.02	91.007	124.319	143.456	422.44	478.68	529.26	591.97	656.69	749.74	809.39	3,658.425	3,946.193			
19	K	4.341	31.625	45.72	60.91	82.66	100.0	117.56	154.86	175.814	503.44	538.95	618.24	686.09	755.73	854.75	918	4,120.778	4,426.114		
20	Ca	6.113	11.871	50.908	67.10	84.41	108.78	127.7	147.24	188.54	211.270	564.13	629.09	714.02	787.13	861.77	968	1,034	4,610.955	4,933.931	
21	Sc	6.54	12.80	24.76	73.47	91.66	111.1	138.0	158.7	180.02	225.32	591.25	656.39	726.03	816.61	895.12	974	1,087	1,157	5,129.045	5,469.7
22	Ti	6.82	13.58	27.491	43.266	99.22	119.36	140.8	168.5	193.2	215.91	249.832	685.89	755.47	829.79	926.00					
23	V	6.74	14.65	29.310	46.707	65.23	128.12	150.17	173.7	205.8	230.5	265.23	291.497	787.33	861.33	940.36					
24	Cr	6.766	16.50	30.96	49.1	69.3	90.56	161.1	184.7	209.3	244.4	255.04	308.25	336.267	895.58	974.02					
25	Mn	7.435	15.640	33.667	51.2	72.4	95	119.27	196.46	221.8	248.3	270.8	298.0	355	384.30	1,010.64					
26	Fe	7.870	16.18	30.651	54.8	75.0	99	125	151.06	235.04	262.1	286.0	314.4	343.6	404	435.3	1,133.2†				
27	Co	7.86	17.06	33.50	51.3	79.5	102	129	157	186.13	276	290.4	330.8	361.0	392.2	457	489.5	1,266.1			
28	Ni	7.635	18.168	35.17	54.9	75.5	108	133	162	193	224.5	305	336	379	411	444	512	546.8	1,403.0		
29	Cu	7.726	20.292	36.83	55.2	79.9	103	139	166	199	232	321.2	352	384	430	464	499	571	607.2	1,547	
30	Zn	9.394	17.964	39.722	59.4	82.6	108	134	174	203	238	266	368.8	401	435	484	520	557	633	671	1,698
31	Ga	5.999	20.51	30.71	64							274	310.8	419.7	454	490	542	579	619	695	738
32	Ge	7.899	15.934	34.22	45.71	93.5															
	As	9.81	18.633	28.351	50.13	62.63	127.6														
	Se	9.752	21.19	30.820	42.944	68.3	81.70	155.4													
35	Br	11.814	21.8	36	47.3	59.7	88.6	103.0	192.8												
36	Kr	13.999	24.359	36.95	52.5	64.7	78.5	111.0	126	230.9											
37	Rb	4.177	27.28	40	52.6	71.0	84.4	99.2	136	150	277.1										
38	Sr	5.695	11.030	43.6	57	71.6	90.8	106	122.3	162	177										
39	Y	6.38	12.24	20.52	61.8	77.0	93.0	116	129	146.2	191	324.1									
40	Zr	6.84	13.13	22.99	34.34	81.5						306	374.0								
41	Nb	6.88	14.32	25.04	38.3	50.55	102.6	125													
42	Mo	7.099	16.15	27.16	46.4	61.2	68	126.8	153												
43	Tc	7.28	15.26	29.54																	
44	Ru	7.37	16.76	28.47																	
45	Rh	7.46	18.08	31.06																	
46	Pd	8.34	19.43	32.93																	
47	Ag	7.576	21.49	34.83																	
48	Cd	8.993	16.908	37.48																	
49	In	5.786	18.869	28.03	54																
50	Sn	7.344	14.632	30.502	40.734	72.28															
51	Sb	8.641	16.53	25.3	44.2	56	108														
52	Te	9.009	18.6	27.96	37.41	58.75	70.7	137													
53	I	10.451	19.131	33																	
54	Xe	12.130	21.21	32.1																	
55	Cs	3.894	23.1†																		
56	Ba	5.212	10.004																		
57	La	5.577	11.06	19.175																	

Table (continued)

AT. NO.	ELEMENT	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
		IONIZATION POTENTIAL (ELECTRON VOLTS)									
58	Ce	5.47	10.85	20.20	36.72						
59	Pr	5.42	10.55	21.62	38.95	57.45					
60	Nd	5.49	10.72								
[illegible]	Pm	5.55	10.90								
62	Sm	5.63	11.07								
63	Eu	5.67	11.25								
64	Gd	6.14	12.1								
65	Tb	5.85	11.52								
66	Dy	5.93	11.67								
67	Ho	6.02	11.80								
68	Er	6.10	11.93								
69	Tm	6.18	12.05	23.71							
70	Yb	6.254	12.17	25.2							
71	Lu	5.426	13.9								
72	Hf	7.0	14.9	23.3	33.3						
73	Ta	7.89									
74	W	7.98									
75	Re	7.88									
76	Os	8.7									
77	Ir	9.1									
78	Pt	9.0	18.563								
79	Au	9.225	20.5								
80	Hg	10.437	18.756	34.2							
81	Tl	6.108	20.428	29.83							
82	Pb	7.416	15.032	31.937	42.32	68.8					
83	Bi	7.289	16.69	25.56	45.3	56.0	88.3				
84	Po	8.42									
85	At										
86	Rn	10.748									
87	Fr										
88	Ra	5.279	10.147								
89	Ac	6.9	12.1								
90	Th		11.5	20.0	28.8						
91	Pa										
92	U										
93	Np										
94	Pu	5.8									
95	Am	6.0									

<u>ESIM. 1</u> Kuinka suuri osa Ca - atomeista on ionisoitunut Siriuksen atmosfäärissä, kun $T = 10000$ K ja $P_e = 300$ dyn/cm^2 ? (Vertailun vuoksi todettakoon, että 1 bar = 10^6 dyn/cm^2)

Ca I : $\chi_o = 6.11$ eV
$u_o(10000K) = 4.7$

Ca II: $u_1(10000K) = 3.55$

Sahan yhtälö :

$$\frac{N_1 \cdot P_e}{N_o} = 0.331 \times T^{5/2} \times \frac{2u_1}{u_o} \times 10^{-\frac{5040}{T}\chi_o[eV]}$$

$$\frac{N_1}{N_o} = \frac{1}{300} \times 0.331 \times 10^{4 \cdot \frac{5}{2}} \times 1.51 \times 10^{-0.504 \times 6.11}$$

$$\frac{N_1}{N_o} = 1.4 \times 10^4$$

Todetaan, että lähes kaikki Ca - atomit ovat kerran ionisoituneet (Ca II).

<u>ESIM. 2</u> Kuinka suuri on kahdesti ionisoituneen kalsiumin osuus Siriuksen atmosfäärissä (jatkoa edelliseen tehtävään). Määritä myös ionien suhteelliset osuudet.

Ca II : $\chi_1 = 11.87$ eV
CaIII : $u_2 = 1.0$

$$\frac{N_2 \cdot P_e}{N_1} = 0.331 \times 10^{4 \cdot \frac{5}{2}} \times 0.56 \times 10^{-0.504 \times 11.87} = 1930$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{1930}{300} = 6.4$$

Jakauma : Ca I : $N_o = \frac{N_1}{1.4 \times 10^4} \approx 10^{-4} N_1$

Ca II : N_1
Ca III : $N_2 = 6.4 N_1$
Ca IV : erittäin vähän
(Ca III : $\chi_2 = 51.2$ eV $\Rightarrow 10^{-0.504 \times 51.2} \approx 10^{-26}$)

$N \approx N_1 + N_2 = 7.4 N_1$

Ca II :n osuus on $\underline{N_1/N \approx 13\ \%}$

CaIII :n osuus on $\underline{N_2/N \approx 87\ \%}$

ESIM. 3 Vedyn sekä heliumin ionisoituminen lämpötilan funktiona, kun $P_e = 10\ \mathrm{dyn/cm^2}$

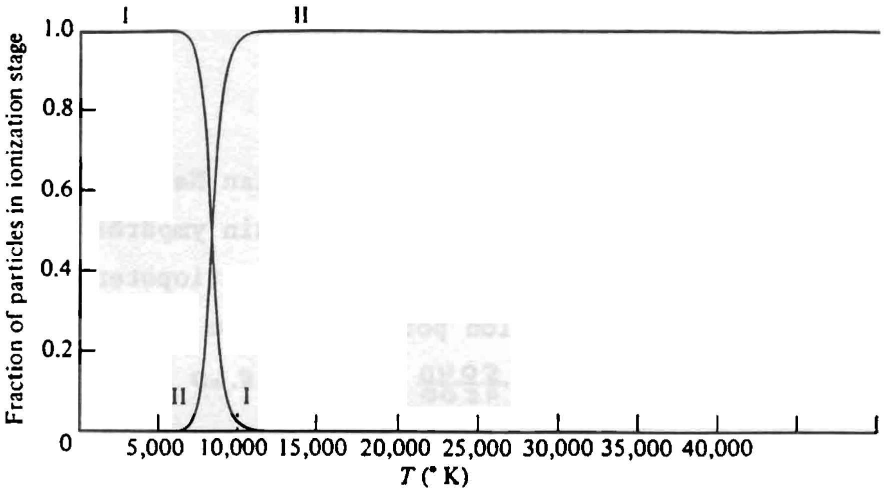
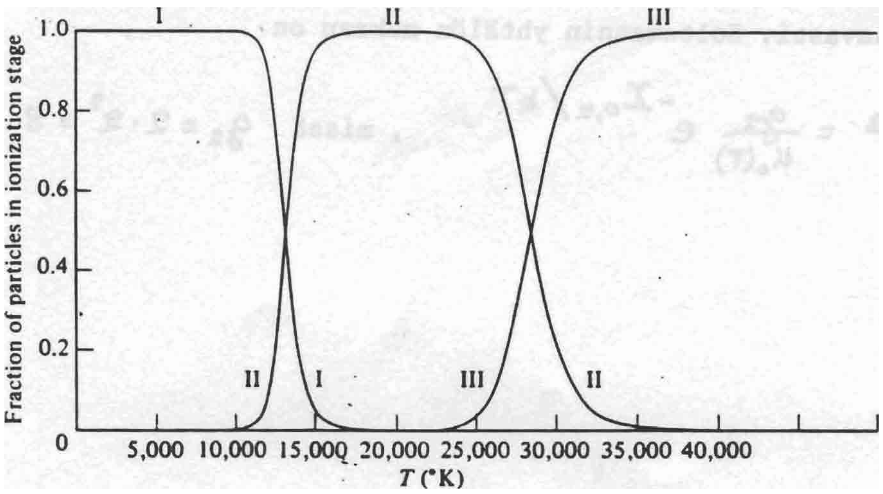


Fig. Ionization of Hydrogen. An electron pressure $P_e = 10$ dynes cm^{-2} is assumed. For this electron pressure, hydrogen is almost completely neutral at temperatures below 6,000°K and almost completely ionized above 11,000°K.

Table **Ionization of Hydrogen ($P_e = 10$ dyne cm^{-2}).**

T	$\frac{N_{II}}{N_I}$	$\frac{N_I}{N_I + N_{II}}$	$\frac{N_{II}}{N_I + N_{II}}$
4,000°K	2.46×10^{-10}	1.000	0.246×10^{-9}
6,000	3.50×10^{-4}	1.000	0.350×10^{-3}
8,000	5.15×10^{-1}	0.660	0.340
10,000	$4.66 \times 10^{+1}$	0.0210	0.979
12,000	$1.02 \times 10^{+3}$	0.000978	0.999
14,000	$9.82 \times 10^{+3}$	0.000102	1.000
16,000	$5.61 \times 10^{+4}$	0.178×10^{-4}	1.000
18,000	$2.25 \times 10^{+5}$	0.444×10^{-5}	1.000
20,000	$7.05 \times 10^{+5}$	0.142×10^{-5}	1.000

Fig. Ionization of Helium. An electron pressure $P_e = 10$ dynes cm^{-2} is assumed. For this electron pressure, helium is almost completely neutral at temperatures below 10,000°K, once ionized in the neighborhood of 20,000°K, and almost entirely twice ionized above 37,000°K.



2.3.8 Ionisaatioyhtälön verifiointi

a) Auringonpilkut

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Auringonpilkussa} & T_{spot} = 4500\mathrm{K} \\ \text{ympäristössä} & T_{phot} = 5740\mathrm{K}\end{array}\right\} \quad \Delta T = 1200\mathrm{K}$$

Havainnot osoittavat, että neutraalien alkuaineittan Na, K, Ca viivat ovat tuntuvasti voimakkaammat auringonpilkuissa kuin ympäröivässä fotosfäärissä. Koska kyseisten alkuaineitten ionisaatiopotentiaalit ovat luokkaa 4-6 eV, on Sahan yhtälön potenssilauseke

auringonpilkun tapauksessa $10^{-\frac{5040}{4500}\cdot 5} = 10^{-5.60}$

fotosfäärin tapauksessa $10^{-\frac{5040}{5740}\cdot 5} = 10^{-4.42}$

Täten ionisaatiosuhde N_1/N_0 auringonpilkussa eroaa huomattavasti vastaavasta suhteesta ympäröivässä fotosfäärissä, mikä on sopusoinnussa havaintojen kanssa.

b) Spektriluokituksen selittäminen ionisaation ja virityksen avulla

Sahan ja Boltzmannin kaavoja voidaan käyttää lämpötilaindikaattoreina, kun elektronipaine oletetaan tunnetuksi. Tarkasteltaessa spektriviivoja, joiden lähtötasona on viritystila (esim. vedyn Balmer-sarjan lähtötason n=2) on huomioitava seuraavat vaikutukset:

1) Lämpötilan noustessa viritystilan miehitys kasvaa
2) Lämpötilan noustessa seuraavan ionisaatioasteen osuus kasvaa, minkä seurauksena em. viritystilan miehitys vähenee.

ESIM. Vedyn Balmer-sarjan viivat:
Viritystilassa n=2 olevien atomien osuus neutraalivedystä saadaan seuraavasti. Boltzmannin yhtälön mukaan on

$$\frac{N_{0,2}}{N_0} = \frac{g_2}{u_0(T)}\, e^{-\chi_{0,2}/kT} \quad \text{, missä} \quad g_2 = 2\cdot 2^2 = 8$$

Sahan yhtälöstä saadaan N_1:

$$N_1 = \frac{N_0}{P_e}\,\frac{(2\pi m)^{3/2}(kT)^{5/2}}{h^3}\,\frac{2u_1(T)}{u_0(T)}\,e^{-\chi_0/kT}\text{, missä } \chi_0 = 13.6\text{ eV}$$

Viritystilassa n=2 olevien atomien osuus kaikesta vedystä on siten

$$\frac{N_{0,2}}{N_0+N_1} = \frac{N_{0,2}}{N_0}\,\frac{N_0}{N_0+N_1} = \frac{N_{0,2}}{N_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{N_1}{N_0}}$$

Olettamalla elektronipaineeksi P_e = 10 dyn/cm^2 saadaan seuraavat lukusuhteet

T [K]	$N_{0,2}/N_0$	$\frac{N_0}{N_0+N_1}$	$\frac{N_{0,2}}{N_0+N_1}$
4000	$5.62\ 10^{-13}$	1.000	$5.62\ 10^{-13}$
6000	$1.08\ 10^{-8}$	1.000	$1.08\ 10^{-8}$
8000	$1.50\ 10^{-6}$	0.660	$0.99\ 10^{-6}$ ← maksimikohta
10000	$2.89\ 10^{-5}$	0.021	$0.61\ 10^{-6}$
12000	$2.08\ 10^{-4}$	$0.978\ 10^{-3}$	$0.20\ 10^{-6}$
14000	$8.51\ 10^{-4}$	$1.02\ 10^{-4}$	$8.68\ 10^{-8}$
16000	$2.45\ 10^{-3}$	$1.78\ 10^{-5}$	$4.36\ 10^{-8}$
18000	$5.57\ 10^{-3}$	$4.44\ 10^{-6}$	$2.47\ 10^{-8}$
20000	$1.08\ 10^{-2}$	$1.42\ 10^{-6}$	$1.53\ 10^{-8}$

Vastaavasti voidaan laskemalla osoittaa, että Ca I 4227-viiva on voimakas kylmissä tähdissä spektriluokkaan F0 saakka.

T_{eff}(F0) = 7350 K : $\frac{N_1}{N_0} \approx 500$
T_{eff}(G0) = 6050 K : $\frac{N_1}{N_0} \approx 3.9$

Spektriluokan F0 kohdalla CaI viivat siis heikkenevät, mutta CaII viivat ovat edelleen vahvoja. Vielä kuumemmissa tähdissä (T>10000K) CaII ja H- ja K- viivat heikkenevät ja He-viivat voimistuvat.

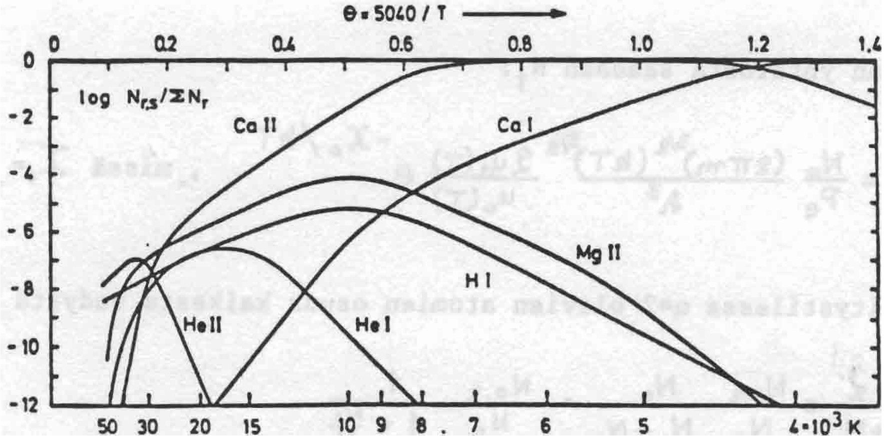


Abb. Thermische Ionisation (17.13) und Anregung (17.6) als Funktion der Temperatur T bzw. $\Theta = 5040/T$ für einen Elektronendruck $P_e = 100\ \mathrm{dyn/cm^2}$ (~ Mittelwert für Sternatmosphären). Die Temperaturskala überdeckt den ganzen Bereich von den O-Sternen (links) bis zu den M-Sternen (rechts). Die Sonne (G2) wäre etwa bei $T = 5800\ ^\circ\mathrm{K}$ einzuordnen. Unsere Kurven veranschaulichen die von *M. N. Saha* 1920 gegebene Deutung der Harvard-Sequenz der Spektraltypen (Abschn. 15): Zum Beispiel ist Wasserstoff (H I) bis $T \approx 10000\ ^\circ\mathrm{K}$ vorwiegend neutral; die Anregung des 2. Quantenzustandes, von dem aus die Balmerlinien im sichtbaren Spektralgebiet absorbiert wurden, nimmt mit T zu. Oberhalb $T = 10000\ ^\circ\mathrm{K}$ wird der Wasserstoff rasch wegionisiert. So versteht man, daß die Wasserstofflinien ihr Intensitätsmaximum bei den A0-Sternen mit $T \approx 10000\ ^\circ\mathrm{K}$ haben

Spektrum	Ionisationsspannung χ_0 eV	Angeregter Zustand und Anregungsspannung	$\chi_{r,s}$ eV	
H I	13.60	$n = 2$;	10.15	
He I	24.59	2^3P^0;	20.87	λ (He I) = 4472 Å
He II	54.42	$n = 3$;	48.16	
Mg I	7.65	—;	—	
Mg II	15.03	3^2D;	8.83	
Ca I	6.11	4^1S;	0.00	λ (Ca I) = 4227 Å
Ca II	11.87	4^2S;	0.00	

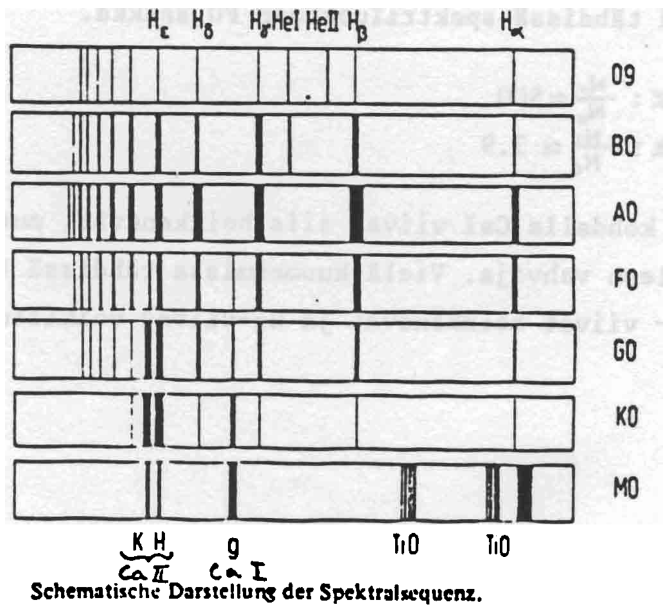


Abb. Schematische Darstellung der Spektralsequenz.

c) Luminositeettiefektit

Sahan yhtälön mukaisesti N_{i+1}/N_i on kääntäen verrannollinen elektronitiheyteen N_e. Täten saadaan erilainen luminositeettiluokka tähdille, joilla sama pintalämpötila, mutta jotka läpimitaltaan poikkeavat huomattavasti toisistaan :

jättiläistähti (tiheys pieni) : pieni $N_e \Rightarrow$ tehokkaampi ionisaatio: $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ suuri

kääpiö (suuri tiheys) : suuri $N_e \Rightarrow N_{i+1}/N_i$ pieni

ESIM. 1 $T_{eff}(\odot)$ = 5750K: kääpiö, Sp G2

$T_{eff}(*)$ = 5750K: jättiläinen, Sp F8

ESIM. 2

	T_{eff}	P_e [dyn/cm^2]	CaI/Ca(total)
M4 kääpiö	3150K	0.5	0.82
M4 jättiläinen	3150K	0.008	0.07

CaI 4227-viiva on hyvä luminositeettiindikaattori (kts. kuvaa alla)

HUOM. Luminositeettikriteerit ovat yleensä empiirisellä pohjalla, eivätkä aina noudata Sahan yhtälöä edes kvalitatiivisesti.

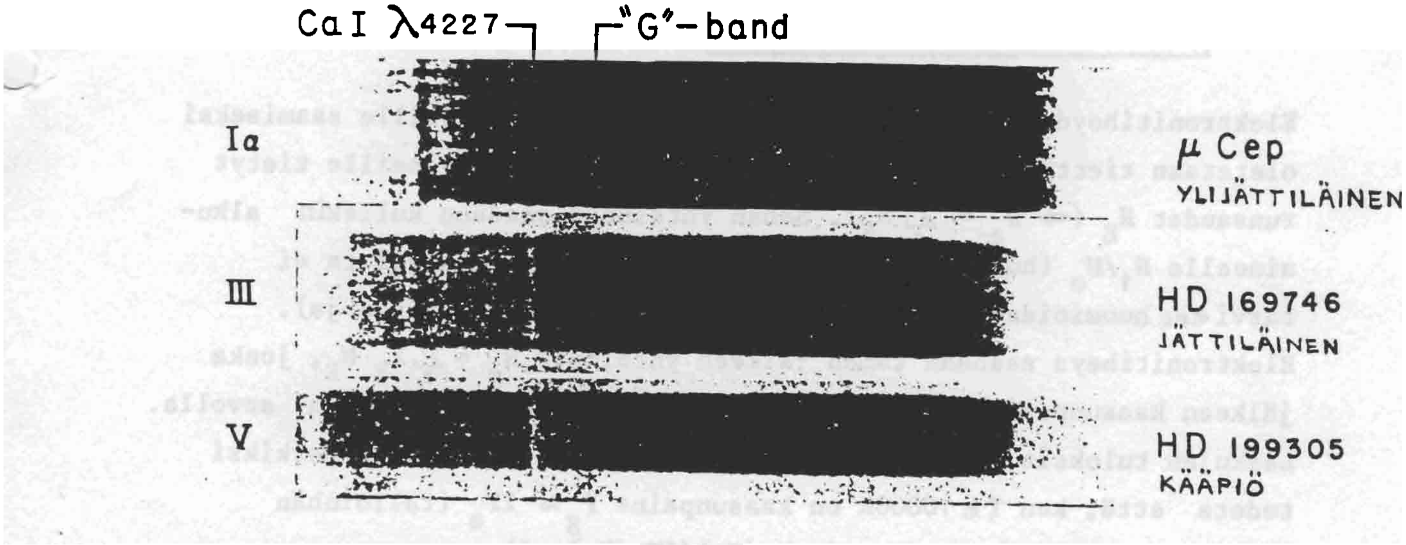


FIG. COMPARISON OF THE CA I LINE, λ4227, IN DWARFS, GIANTS, AND SUPERGIANTS OF SPECTRAL CLASS *M*2
The symbols Ia, III, and V denote the luminosity class of the star in the classification scheme of the Morgan-Keenan-Kellman *Atlas of Stellar Spectra*. The supergiant μ Cephei is one of the brightest stars known, *HD* 169746 is a giant, and *HD* 199305 is a dwarf. Notice that the Ca I line, λ4227, the most conspicuous feature in the dwarf spectrum, steadily weakens in stars of increasing luminosity, until in μ Cephei it is weaker than the lines on either side. The red edge of the "*G*-band," λ4308, strengthens in the brighter stars. (Courtesy, P. C. Keenan and J. J. Nassau, *Ap. J.* **104**, 458, 1946, University of Chicago Press.)

2.3.9 Kaasun paineen ja elektronipaineen välinen riippuvuus

Vedyn ionisaatiopotentiaali $\chi_o(H)$ on 13.6 eV ja "metallien" ionisaatiopotentiaali χ_o(metallit) on 4.5-7.0 eV. Kylmemmissä tähtiatmosfääreissä ($T \lesssim 8000K$) tuottavat siten "metallit" pääosan atmosfäärin vapaista elektroneista. Kuumemmissa tähdissä ($T \gtrsim 10000K$) vety puolestaan vastaa elektronien tuotosta.

Merkitään

$N_{0,E}$ = alkuaineen E neutraalien atomien lukumäärä

$N_{1,E}$ = kertaalleen ionisoituneiden alkuaineen E atomien lukumäärä

$N_E = N_{0,E} + N_{1,E} \approx$ alkuaineen E atomien kokonaismäärä

$X_E = (N_{1,E}/N_E)$ = alkuaineen E ionisaatioaste

$N_a = \sum_E N_E$ = kaikkien atomien lukumäärä

$N_e = X_1 \cdot N_1 + X_2 \cdot N_2 + \ldots = \sum X_E \cdot N_E$ = elektronien kokonaismäärä

Elektronipaine $P_e = N_e kT$

Kaasun paine $P_g = NkT = (N_a + N_e)kT$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{P_g}{P_e} = \frac{N_a + N_e}{N_e} = \frac{1 + N_e/N_a}{N_e/N_a}}$$

Elektronitiheyden N_e ja atomien kokonaismäärän N_a selville saamiseksi oletetaan tietty lämpötila, elektronipaine sekä alkuaineille tietyt runsaudet N_E ($\Rightarrow N_a = \sum_E N_E$). Sahan yhtälöstä saadaan kullekin alkuaineelle N_1/N_o (huom. korkeamman kuin 1. asteen ionisaatiota ei tarvitse huomioida, koska nämä tuottavat niukasti elektroneja). Elektronitiheys saadaan tämän jälkeen yhtälöstä $N_e = \sum_E X_E \cdot N_E$, jonka jälkeen kaasunpaine voidaan laskea kullakin elektronipaineen arvolla. Laskujen tuloksia esitetty kuvassa 3-9. Kuvasta voidaan esimerkiksi todeta että, kun $T \gtrsim 10000K$ on kaasunpaine $P_g \approx 2P_e$ (tällöinhän $X_H \approx 1$ ja $N_e \approx N_a \Longrightarrow P_g/P_e = (1+N_e/N_a)/(N_e/N_a) \approx 2$).

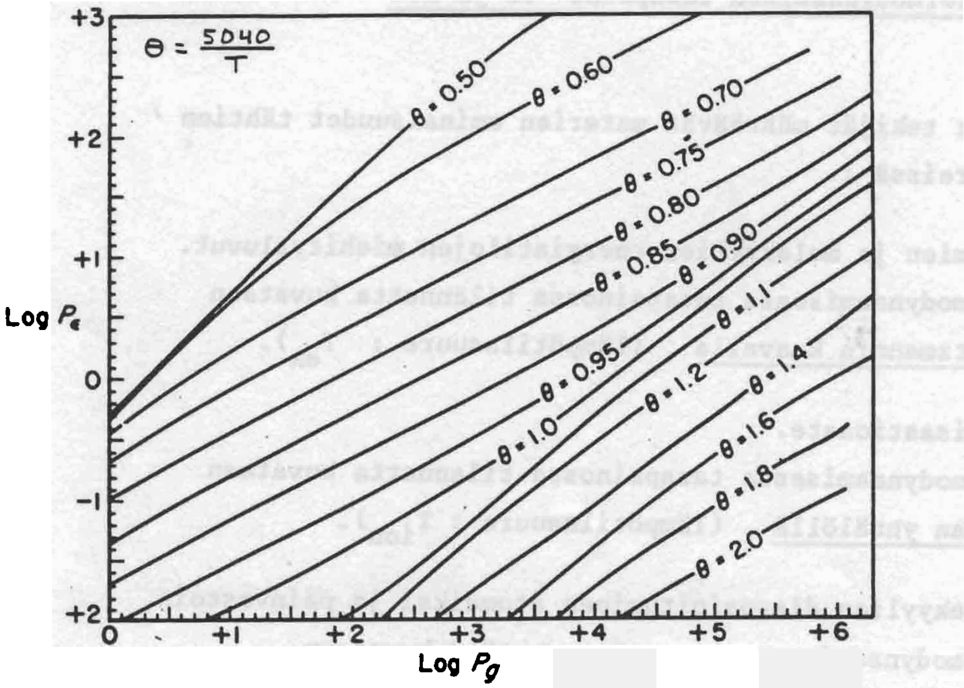


FIG. THE RELATION BETWEEN GAS PRESSURE, ELECTRON PRESSURE, AND TEMPERATURE FOR NORMAL COMPOSITIONS, $P_e(P_g,T)$
(Courtesy Anne and Charles Cowley.)

ESIM. Oletetaan, että alkuaine E vastaa yksin elektronien tuotosta.

$$N_E = \frac{\rho_E}{m_E} = N_I(E) + N_{II}(E) = N_I(E) + N_e$$

Sahan yhtälö antaa suhteen

$$\frac{N_{II}(E)}{N_I(E)} = \frac{N_e}{N_I(E)} = \frac{N_E - N_I(E)}{N_I(E)}$$

$\Rightarrow N_I(E)$ voidaan ratkaista

$\Rightarrow N_e = N_E - N_I(E)$

$\Rightarrow P_e = N_e kT$

$\Rightarrow P_g = (N_a + N_e)kT$, missä $N_a = \frac{\rho}{\bar{m}} = \frac{\rho}{\bar{A}\cdot m_H}$

$\bar{A}$ = kaasuseoksen keskimääräinen molekyylipaino

m_H = vetyatomin massa

2.3.10 Termodynaaminen tasapaino TE ja LTE

Seuraavat tekijät määräävät materian ominaisuudet tähtien atmosfääreissä :

1. Atomien ja molekyylien energiatilojen miehitysluvut.
   Termodynaamisessa tasapainossa tilannetta kuvataan Boltzmannin kaavalla (lämpötilasuure : T_{ex}).

2. Ionisaatioaste.
   Termodynaamisessa tasapainossa tilannetta kuvataan Sahan yhtälöllä (lämpötilasuure : T_{ion}).

3. Molekyylien dissosioituminen atomeiksi ja päinvastoin.
   Termodynaamisessa tasapainossa tätä kuvataan dissosiaatiokaavalla (lämpötilasuure : T_{diss})

4. Atomien ja elektronien nopeusjakautumat.
   Termodynaamisessa tasapainossa tätä kuvataan Maxwellin nopeusjakautumalla (lämpötilasuure : T_{kin}).

5. Kaasun säteilyintensiteetin aallonpituusriippuvuus.
   Termodynaamisessa tasapainossa tätä kuvataan Planckin säteilylain avulla (lämpötilasuure : mustan kappaleen lämpötila T_{bb}).

Termodynaamisessa tasapainotilassa kaikki yllä luetellut ominaisuudet seuraavat yksikäsitteisesti kemiallisesta koostumuksesta, tiheydestä ja lämpötilasta, joka on vakio koko tarkasteltavassa alueessa.

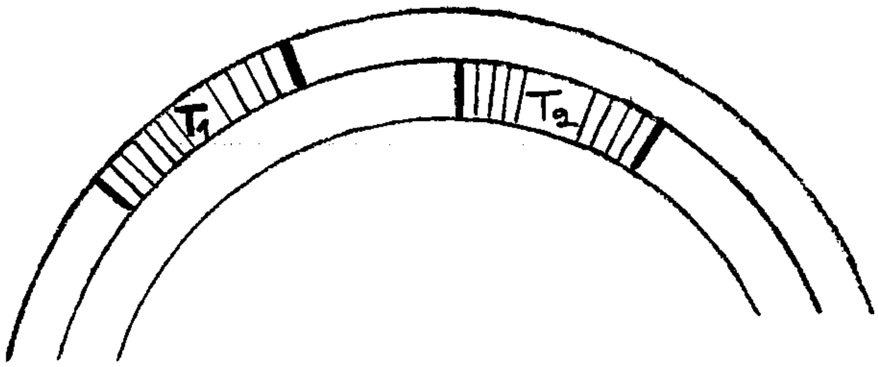
Termodynaamisessa tasapainossa TE (thermal equilibrium) :

$$\boxed{T_{ex} = T_{ion} = T_{diss} = T_{kin} = T_{bb}}$$

Jokaista prosessia vastaa yhtä nopeasti tapahtuva vastakkaissuuntainen prosessi.

<u>Paikallisessa termodynaamisessa tasapainossa LTE</u> (local thermodynamic equilibrium) vallitsee TE vain tietyssä rajoitetussa osa-alueessa.

ESIM. TE pätee vain osassa tiettyä atmosfäärikerrosta :



<u>Termodynaamisessa epätasapainossa (non-LTE)</u> edellä mainitut lämpötilat poikkeavat toisistaan myös paikallisesti.

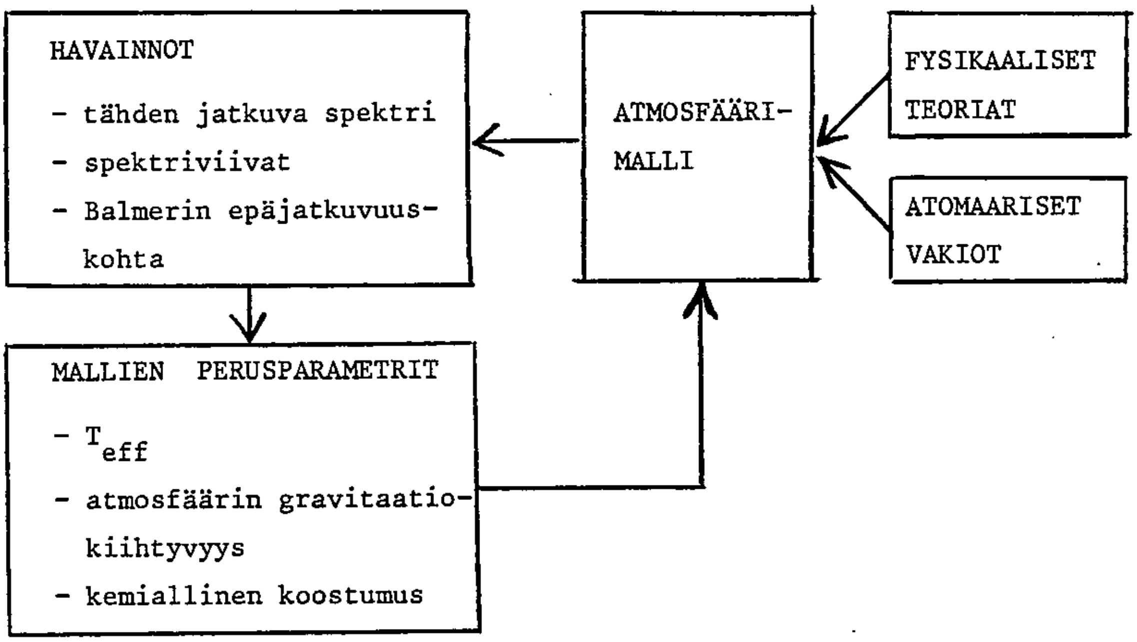
$$\boxed{T_{ex} \neq T_{ion} \neq T_{diss} \neq T_{kin} \neq T_{bb}}$$

ESIM. Maserlähteissä T_{ex} 10^{13}K , mutta $T_{kin} < 1000$ K .

2.4 TÄHTIEN ATMOSFÄÄRIMALLIEN LASKEMINEN

Probleema : Miten lämpötila, paine, tiheys ja geometrinen syvyys x riippuvat atmosfäärin optisesta syvyydestä τ ?

Atmosfäärimallin syntyprosessia kuvaa seuraava kaaviokuva :



Atmosfäärimalli lasketaan iterointitekniikalla. Perusparametreille T_{eff}, g ja kemialliselle koostumukselle otetaan tietyt lähtöarvot. Teoreettisten laskujen tuloksena saadaan ennusteet tähdestä ulostulevan säteilyvuon tiheydelle, Balmerin epäjatkuvuudelle sekä absorptioviivojen intensiteetille ja profiileille. Vertaamalla näitä teoreettisia ennusteita havaintoihin voidaan mallia parantaa

1) muuttamalla lähtöparametrien arvoja

   (reunaehto : $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_\nu(\tau_0)\,d\nu =$ const. , ts. säteilyn kokonaistehon pysyttävä vakiona atmosfäärin eri kerroksissa)

2) muuttamalla teoreettisia oletuksia
   (esim. poikkeamat LTE:stä sekä tähden rotaation ja konvektiovirtausten huomioiminen).

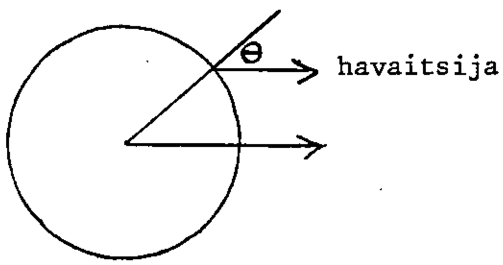
Ensimmäisessä approksimaatiossa oletetaan myös ns. harmaa atmosfääri, jossa keskimääräinen absorptiokerroin $\bar{k}$ ei riipu aallonpituudesta. Keskimääräisten absorptiokertoimien määritelmät esitetään luvussa 2.5.4f.

HUOM. Atmosfäärimallit ovat lähtökohtana laskettaessa tähtien teoreettisia spektriviivoja. Kun suureitten T, P_g, P_e, ϱ ja k_ν riippuvuus atmosfäärin optisesta syvyydestä tunnetaan, voidaan laskea alkuaineen ionisaatioaste sekä viiva-absorptiokerroin atmosfäärin eri syvyyksissä.

Seuraavassa esitetään Auringon sekä varhaisen spektriluokan tähden atmosfäärimallin laskemisen pääperiaatteet.

2.4.1 Lämpötilajakautuman $T(\tau_\lambda)$ empiirinen määritys Auringon atmosfäärissä

Auringon reunatummumisen johdosta saadaan riippuvuus $T = T(\tau)$ suoraan havainnoista.



Säteilynkuljetusyhtälön ratkaisu Eddingtonin approksimaatiossa antoi seuraavat yhteydet (kts. lukua 2.2.6b)

$$I(0,\theta) = \jmath(\cos\theta)$$
$$\tau_\theta = \cos\theta$$

Auringon kiekon keskeltä havaittu valo tulee siis keskimäärin syvemmistä kerroksista kuin kiekon reunaosista havaittu valo. Reunatummumisesta seuraa, että atmosfäärin lämpötila kasvaa syvemmälle mentäessä.

$$I_\lambda(0,\theta) = \int_0^\infty B_\lambda(\tau_\lambda)\, e^{-\tau_\lambda \sec\theta} \sec\theta \, d\tau_\lambda$$ (säteilynkuljetusyhtälön intensiteettilauseke)

Kun tämä normitetaan kiekon keskeltä tulevaan intensiteettiin I (0,0), saadaan funktio

$$\phi_\lambda(\theta) = \frac{I_\lambda(0,\theta)}{I_\lambda(0,0)} = \int_0^\infty b_\lambda(\tau_\lambda)\, e^{-\tau_\lambda \sec\theta} \sec\theta \, d\tau_\lambda$$

missä $b_\lambda = \dfrac{B_\lambda(\tau_\lambda)}{I_\lambda(0,0)}$

Koska Auringon pinnan säteily tulee keskimäärin syvyydestä $\tau_\lambda = \cos\theta$, ei havainnoista saada suoraan tietoa atmosfäärin syvemmistä kerroksista. Tässä rajoitetussa pintakerroksessa ($\tau \lesssim 2$) voidaan olettaa:

$$b_\lambda(\tau_\lambda) = A_\lambda + B_\lambda \tau_\lambda + C_\lambda E_2(\tau_\lambda) \quad \text{, missä} \quad E_2(\tau_\lambda) = \int_1^\infty \frac{e^{-\tau_\lambda \cdot y}}{y^2}\, dy$$

Sijoittamalla tämä lausekkeeseen $\phi_\lambda(\theta)$ ja integroimalla saadaan

$$\phi_\lambda(\cos\theta) = A_\lambda + B_\lambda \cos\theta + C_\lambda \left[1 - \cos\theta \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{\cos\theta}\right)\right]$$

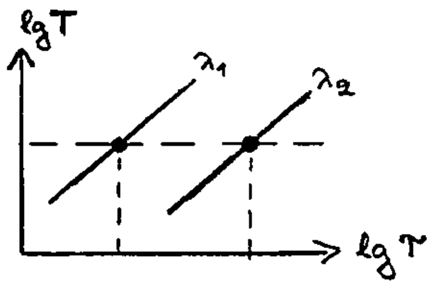
Sovittamalla $\phi_\lambda(\cos\theta)$ havaintoihin saadaan vakiot A_λ, B_λ, C_λ ja siten myös $b_\lambda(\tau_\lambda)$.
Edelleen saadaan Planckin funktio:

$$\left.\begin{aligned} B_\lambda[T(\tau_\lambda)] &= b_\lambda(\tau_\lambda) \cdot \underbrace{I_\lambda(0,0)}_{\text{havainnoista}} \\ B_\lambda[T(\tau_\lambda)] &= \frac{2h\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{T = T(\tau_\lambda)}$$

Tämä empiirinen menetelmä antaa tulokseksi:

$T_0 \approx 4000\,K$
$T(\tau = 2) \approx 7000\,K$

HUOM. Eri aallonpituuksilla on havaittu ϕ_λ erilainen ja siten myös $T(\tau_\lambda)$-käyrät poikkeavat toisistaan:



Kuvion käyrien ja vaakasuoran viivan leikkauspisteet antavat riippuvuuden

$$\boxed{\tau_\lambda = \tau(\lambda)}$$

Koska τ riippuu aallonpituudesta, on standardiaallonpituudeksi valittu $\lambda_0 = 5000Å$. Lisäksi merkitään $\tau_{5000Å} = \tau_0$.

2.4.2 Auringon fotosfäärimallin laskeminen

a) Riippuvuuden T = T($\bar{\tau}$) laskeminen

Säteilynkuljetusyhtälön ratkaisu Eddingtonin approksimaatiossa antoi tulokseksi:

$$J(\tau) = H(2+3\tau)$$

LTE:ssä on :

$$J(\tau) = B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4(\tau) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma}{\pi} T^4(\tau) = \frac{\sigma}{4\pi} T_{eff}^4 (2+3\tau)$$

T_{eff} puolestaan määritellään:

$$\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_\nu \, d\nu = \sigma T_{eff}^4 = 4\pi H$$

$$\Rightarrow \quad T^4(\bar{\tau}) = \frac{1}{2} T_{eff}^4 \left(1 + \frac{3}{2}\bar{\tau}\right) \quad \Big| \text{ sij. } T_{eff}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T(\bar{\tau}) = 4879 \left(1 + \frac{3}{2}\bar{\tau}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

Huom. Merkintäsopimus : $\bar{\tau} = -\rho \bar{k} dx$

Alla olevassa taulukossa on esitetty Auringon fotosfäärimallin antama T($\bar{\tau}$) riippuvuus.

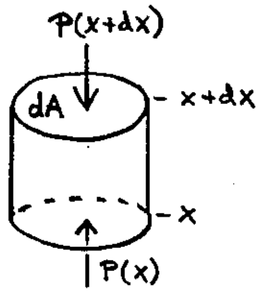
Table 9-1 $T(\bar{\tau})$ and $\theta(\bar{\tau})$.

$\bar{\tau}$	T (°K)	$\theta = \frac{5040}{T}$	$\bar{\tau}$	T (°K)	$\theta = \frac{5040}{T}$
0.050	4967.9	1.0145	0.55	5670.7	0.8888
0.075	5010.7	1.0058	0.60	5728.1	0.8799
0.100	5052.4	0.9975	0.65	5783.8	0.8714
0.125	5093.1	0.9896	0.70	5838.0	0.8633
0.150	5132.8	0.9819	0.75	5890.6	0.8556
0.175	5171.7	0.9745	0.80	5941.9	0.8482
0.200	5209.6	0.9674	0.85	5991.9	0.8411
0.225	5246.8	0.9606	0.90	6040.7	0.8343
0.250	5283.2	0.9540	0.95	6088.4	0.8278
0.275	5318.9	0.9476	1.00	6134.9	0.8215
0.300	5353.8	0.9414	1.10	6224.9	0.8097
0.325	5388.1	0.9354	1.20	6311.2	0.7986
0.350	5421.7	0.9296	1.30	6394.1	0.7882
0.375	5454.8	0.9240	1.40	6473.8	0.7785
0.400	5487.2	0.9185	1.50	6550.8	0.7694
0.425	5519.1	0.9132	1.60	6625.1	0.7607
0.450	5550.4	0.9080	1.70	6697.0	0.7526
0.475	5581.2	0.9030	1.80	6766.6	0.7448
0.500	5611.5	0.8982	1.90	6834.2	0.7375
			2.00	6899.8	0.7305

b) Riippuvuuden $P = P_g(\bar{\tau})$ laskeminen

Auringon fotosfäärissä on säteilypaine merkityksetön, joten kokonaispaine $P = P_g + P_{rad} \approx P_g$.

Hydrostaattisessa tasapainossa on



$$dP_g\, dA = -g\, dm = -g\, \rho\, dx\, dA$$

$$\Longrightarrow \quad dP_g = -g\, \rho\, dx$$

Koska monissa tähdissä fotosfäärikerros on varsin ohut, voidaan olettaa, että gravitaatiokiihtyvyys pysyy vakiona tässä kerroksessa.

$g = \dfrac{GM}{R^2}$, missä M = tähden massa
R = tähden säde

Yhtälöparissa
$$\begin{cases} \dfrac{dP(x)}{dx} = -g\, \rho(x) & \text{(hydrostaattinen tasapaino)} \\ P(x) = \dfrac{k}{m}\, \rho(x) T(x) & \text{(ideaalikaasun tilanyhtälö)} \end{cases}$$

on kolme tuntematonta funktiota: $P(x)$, $\rho(x)$ ja $T(x)$. Koska riippuvuus $T = T(\bar{\tau})$ voidaan johtaa säteilynkuljetuksen teoriasta, pyritään seuraavassa myös muut suureet ilmoittamaan optisen syvyyden funktioina.

$$\begin{cases} dP_g = -g\, \rho\, dx \\ d\bar{\tau} = -\bar{k}\, \rho\, dx \end{cases}$$ (miinus, koska τ ja x kasvavat vastakkaissuuntaisesti)

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{dP_g}{d\bar{\tau}} = \frac{g}{\bar{k}}} \qquad \Big|\cdot 2 P_g\, d\tau$$

$$2 P_g\, dP_g = 2\, \frac{g}{\bar{k}}\, P_g\, d\tau \qquad \Big|\, \int$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{P_g^2(\bar{\tau}) = 2g \int_0^{\bar{\tau}} \frac{P_g(\tau)}{\bar{k}(P_g, \tau)}\, d\tau = 2g \int \frac{P_g(\tau)}{\bar{k}(P_g, \tau)}\, \frac{d\tau}{dT}\, dT}$$

Tämä integraaliyhtälö voidaan ratkaista numeerisesti, kunhan keskimääräinen absorptiokerroin $\bar{k}$ tunnetaan (kts. luku 2.5.4).

Oletetaan, että pääasiallisesti H^- ja H aiheuttavat absorptiota Auringon atmosfäärissä. Keskimääräinen absorptiokerroin yhtä vetygrammaa kohti $[cm^2/g]$ lämpötilassa 5700 K on tällöin:

$$\bar{k}_\lambda = \underbrace{\frac{\varepsilon_H}{m_H}\left(1 - x_H(T)\right)}_{\text{H-atomien 1km/g}} \left[P_e \bar{\alpha}_\lambda(H^-) + \bar{\alpha}_\lambda(H)\right]$$

missä ε_H = vedyn massaosuus yhdessä kaasugrammassa

m_H = vetyatomin massa

x_H = vedyn ionisaatioaste

P_e = elektronipaine

$\alpha(H^-)$ = H^- ionin absorptiokerroin yhtä H-atomia kohden ja 1 dyn/cm^2 elektronipainetta kohden

$\alpha(H)$ = vedyn atomaarinen absorptiokerroin

Ensimmäisessä approksimaatiossa voidaan olettaa :

$$\begin{cases} x_H \approx 0 \\ \alpha(H) \ll P_e\,\alpha(H^-) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_\lambda = \frac{\varepsilon_H}{m_H} P_e \bar{\alpha}_\lambda(H^-)$$

$$\Rightarrow P_g^2(\bar{\tau}) = 2g \int_0^{\bar{\tau}} \frac{m_H P_g \, d\tau}{\varepsilon_H P_e \bar{\alpha}(H^-)}$$

Luvussa 2.3.9 saatiin kaasu- ja elektronipaineen välille seuraava yhteys:

$$\frac{P_g}{P_e} = \frac{(N_a + N_e)kT}{N_e kT} = \frac{N_a}{N_e} + 1$$

Kun oletetaan, että Auringon atmosfäärissä metallit ($Z \geq 3$) ovat yhden kerran ionisoituneita ($\Rightarrow N_e \approx N_{metallit}$), niin

$$\frac{P_g}{P_e} = \frac{N_H + N_{He} + N_{metallit}}{N_{metallit}} + 1 = \frac{N_H}{N_{met.}} + \frac{N_{He}}{N_{met.}} + 2$$

Koska $\frac{N_H}{N_{metallit}} \gg 1$, voidaan luku 2 jättää yo. yhtälössä huomioimatta:

$$\frac{P_g}{P_e} \approx \frac{N_H}{N_{met.}}\left(1 + \frac{N_{He}}{N_{met}}\frac{N_{met}}{N_H}\right) = \frac{N_H}{N_{met}}\left(1 + \frac{N_{He}}{N_H}\right)$$

$$\Rightarrow P_g^2(\bar{\tau}) = \frac{2 g m_H}{\varepsilon_H^a} \int_0^{\bar{\tau}} \frac{\frac{N_H}{N_{met.}}\left(1+\frac{N_{He}}{N_H}\right) P_e}{P_e \, \bar{\alpha}_\lambda(H^-)} \, d\tau$$

$$P_g^{(1)}(\bar{\tau}) = \left[\frac{2 g m_H}{\varepsilon_H^a} \frac{N_H}{N_{metallit}} \left(1+\frac{N_{He}}{N_H}\right) \int_0^{\bar{\tau}} \frac{d\tau}{\bar{\alpha}(H^-)} \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ missä } \alpha(H^-) = f[T(\bar{\tau})]$$

Numeerisen integroinnin tuloksena saadaan riippuvuus $P_g^{(1)} = P_g^{(1)}(\bar{\tau})$ ensimmäisessä approksimaatiossa.

Seuraavaa iterointikierrosta varten lasketaan elektronipaine $P_e(\bar{\tau})$ käyttämällä ensimmäisessä approksimaatiossa saatua kaasunpainetta $P_g^{(1)}(\bar{\tau})$. Tämä on mahdollista, koska $P_g = P_g(P_e, T)$ tunnetaan annetulle kemialliselle koostumukselle.

$$\Rightarrow P_g^2(\bar{\tau}) = 2g \int \frac{P_g^{(1)}}{\bar{k}(P_g, T)} \frac{d\tau}{dT} \, dT$$

Koska riippuvuus $T = T(\bar{\tau})$ tunnetaan, on myös $d\tau/dT$ tunnettu, ja numeerisesti integroimalla saadaan riippuvuus $P_g^{(2)} = P_g^{(2)}(\bar{\tau})$ toisessa approksimaatiossa. Näin menetellen voidaan iterointia jatkaa, kunnes peräkkäiset iterointikierrokset antavat tietyllä tarkkuudella saman riippuvuuden $P_g = P_g(\bar{\tau})$.

Riippuvuuden $P = P(\bar{\tau})$ numeerinen integrointi on yksityiskohtaisesti esitetty E. Novotnyn oppikirjassa "Introduction to Stellar Atmospheres and Interiors" (luvut 9.1 ja 9.3-4).

NUMERICAL INTEGRATION OF THE SOLAR ATMOSPHERE

θ	τ	$\bar{\alpha}(H^-) \times 10^{24}$	$\bar{\alpha}(H) \times 10^{24}$	$\log P_g^0$	$\log P_g^1$	$\log P_g$
1.10	0.01	0.1221		3.750	3.744	3.74
1.05	0.04	0.1020		4.142	4.215	4.22
1.00	0.11	0.0838		4.368	4.426	4.44
0.95	0.22	0.0673	0.001	4.556	4.578	4.59
0.90	0.38	0.0547	0.005	4.729	4.710	4.72
0.85	0.68	0.0430	0.021	4.891	4.840	4.84
0.80	1.17	0.0334	0.081	5.048	4.957	4.95
0.75	1.87	0.0250	0.276	5.201	5.048	5.04
0.70	2.94	0.0185	0.977	5.350	5.119	5.10

c) Riippuvuuksien $\varrho(\bar\tau)$ ja $P_e(\bar\tau)$ laskeminen

Kun $T(\bar\tau)$ ja $P(\bar\tau)$ tunnetaan saadaan tiheys $\varrho(\bar\tau)$ suoraan ideaalikaasun tilanyhtälöstä:

$$\boxed{\varrho(\bar\tau) = \frac{\bar m}{k}\,\frac{P(\bar\tau)}{T(\bar\tau)}}$$

Elektronipaineen $P_e(\bar\tau)$ määräämiseksi on laskettava ionisaatioaste jokaiselle alkuaineelle i tietyssä lämpötilassa $T(\bar\tau)$ ja tiheydessä $\varrho(\bar\tau)$. Sahan ionisaatioyhtälön avulla saadaan elektronitiheys $N_e(i)$ ja siten N_e

$$\Rightarrow \boxed{P_e(\bar\tau) = N_e k T}$$

Table 9-6 Model Solar Atmosphere.

$T_{eff} = 5{,}802°K$, $g = 2.741 \times 10^4$ cm sec^{-2}; $X = 0.56$, $Y = 0.41$, $Z = 0.03$.

$\bar\tau$	$-x$ (km)	T (°K)	θ	$P \times 10^{-4}$ (dyne cm^{-2})	$\rho \times 10^8$ (gm cm^{-3})	$\bar\kappa$ (cm^2 gm^{-1})	P_e (dyne cm^{-2})	$(P_e/P) \times 10^4$
0.05	0*	4,968	1.0145	1.54	5.7	0.076	2.5	1.6
0.10	62	5,052	0.9975	2.88	10.4	0.128	4.5	1.6
0.15	91	5,133	0.9819	3.82	13.6	0.161	6.2	1.6
0.20	111	5,210	0.9674	4.61	16.1	0.191	7.7	1.7
0.25	124	5,283	0.9540	5.22	18.0	0.213	9.1	1.7
0.30	134	5,354	0.9414	5.77	19.7	0.236	10	1.8
0.35	144	5,422	0.9296	6.33	21.3	0.258	12	1.9
0.40	153	5,487	0.9185	6.84	22.7	0.280	13	2.0
0.45	160	5,550	0.9080	7.31	24.0	0.301	15	2.0
0.50	167	5,612	0.8982	7.75	25.2	0.322	17	2.2
0.55	172	5,671	0.8888	8.16	26.2	0.345	19	2.3
0.60	178	5,728	0.8799	8.55	27.2	0.368	21	2.4
0.65	183	5,784	0.8714	8.91	28.1	0.391	23	2.6
0.70	187	5,838	0.8633	9.25	28.9	0.418	25	2.7
0.75	191	5,891	0.8556	9.56	29.6	0.445	28	2.9
0.80	194	5,942	0.8482	9.86	30.3	0.471	29	3.0
0.85	198	5,992	0.8411	10.15	30.9	0.498	32	3.1
0.90	201	6,041	0.8343	10.41	31.5	0.526	35	3.3
0.95	204	6,088	0.8278	10.67	32.0	0.552	37	3.5
1.00	207	6,135	0.8215	10.91	32.5	0.577	40	3.7
1.10	212	6,225	0.8097	11.37	33.3	0.636	46	4.1
1.20	216	6,311	0.7986	11.78	34.0	0.700	55	4.7
1.30	220	6,394	0.7882	12.15	34.7	0.771	64	5.2
1.40	224	6,474	0.7785	12.49	35.2	0.855	72	5.8
1.50	227	6,551	0.7694	12.80	35.6	0.950	83	6.5
1.60	230	6,625	0.7607	13.07	36.0	1.060	95	7.2
1.70	232	6,697	0.7526	13.32	36.3	1.177	110	8.2
1.80	234	6,767	0.7448	13.54	36.5	1.298	120	9.1
1.90	236	6,834	0.7375	13.74	36.7	1.423	140	10
2.00	238	6,900	0.7305	13.92	36.8	1.549	160	11

d) Geometrisen syvyyden x ja optisen syvyyden $\bar{\tau}$ välinen riippuvuus

Yhtälöparista
$$\begin{cases} \frac{dP}{dx} = -g\rho & \text{(hydrostaattinen tasapaino)} \\ \rho = \frac{\bar{m}}{k}\frac{P}{T} & \text{(ideaalikaasun tilanyhtälö)} \end{cases}$$

saadaan $\frac{dP}{dx} = -g\frac{\bar{m}}{k}\frac{P}{T}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP}{P} = -\frac{g\bar{m}}{kT}dx$$

$$\Rightarrow \quad dx = -\frac{kT}{g\bar{m}}d(\ln P) \quad \Big| \int$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(\bar{\tau}) = -\frac{k}{g\bar{m}}\int_0^{\bar{\tau}} T(\tau)\, d[\ln P_g(\tau)]}$$

Täten
$$\left.\begin{array}{l} x = x(P_g) \Rightarrow P_g = P_g(x) \\ P_g = P_g(\bar{\tau}) \end{array}\right\} \Rightarrow x = x(\bar{\tau})$$

Yllä olevan lausekkeen $x(\bar{\tau})$ numeerinen integrointi on esitetty Novotnyn oppikirjassa (luku 9.5).

Optisen syvyyden ollessa suurempi kuin 0.6 voidaan myös käyttää yhtälöä

$$\left.\begin{array}{l} d\bar{\tau} = -\bar{k}\rho\, dx \Rightarrow \frac{dx}{d\bar{\tau}} = -\frac{1}{\bar{k}\rho} \\ \rho = \frac{\bar{m}}{k_B}\frac{P}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dx}{d\bar{\tau}} = \frac{k_{\text{Boltzm.}}}{\bar{k}\,\bar{m}}\cdot\frac{T}{P}$$

HUOM. Kun $\tau < 0.6$, ei tätä differentiaaliyhtälöä pidä käyttää, koska sekä ρ että $\bar{k}$ kasvavat voimakkaasti tällä alueella.

e) Auringon fotosfäärimallin tuloksia

1) Fotosfäärin paksuus on noin 300 km optisen syvyyden ollessa $0.01 < \tau_{5000Å} < 2.5$. Valoa säteilevä kerros on siten Auringossa erittäin ohut : $1/2000\ R_\odot$.
2) $T(\bar{\tau}_{5000}=0.4) \approx 5800$ K
3) $P_g(\bar{\tau}_{5000}=0.4) \approx 10^5$ dyn/cm$^2 \approx 0.1$ atm (1atm = $1.013\text{x}10^5 N/m^2 = 1.013\text{x}10^6 \frac{\text{dy}}{\text{cm}}$
4) $P_e(\bar{\tau}_{5000}=0.4) \approx 10$ dyn/cm$^2 \approx 10^{-5}$atm
5) $\rho(\bar{\tau}_{5000}=0.4) \approx 3\text{x}10^{-7}$ g/cm$^3 \approx 3\text{x}10^{-4}\rho_{\text{ilma}}$

Table Model Solar Atmosphere (Main Sequence G2).* This is a portion of the Harvard-Smithsonian Reference Atmosphere [O. Gingerich, R. W. Noyes, W. Kalkofen, and Y. Cuny, 1971 (238).]

$b_{eff} = 0.8720$, $T_{eff} = 5{,}780°K$, $\log g = 4.440$.

H:He:Other elements (by number) = 941:94.1:1

τ_{5000}	T (°K)	$\log P_g$	$\log P_e$	P_g	P_e	ρ	κ_{5000}	$H^+/\Sigma H$	$\epsilon_{metals}/\Sigma\epsilon$ (per cent)	x (km)
10^{-8}	8,930	−0.8187	−1.3168	1.518 (−1)	4.822 (−2)	1.81 (−13)	0.146	5.11 (−1)	0.2	1,850
10^{-7}	8,320	−0.7724	−1.2721	1.689 (−1)	5.345 (−2)	2.16 (−13)	0.146	5.09 (−1)	0.2	1,820
10^{-6}	7,360	−0.4245	−1.1054	3.763 (−1)	7.846 (−2)	6.31 (−13)	0.0863	2.89 (−1)	0.3	1,620
10^{-5}	5,300	+1.8319	−1.1695	6.790 (+1)	6.769 (−2)	1.99 (−10)	0.00258	9.13 (−4)	16.9	840
10^{-4}	4,170	+2.9386	−1.2133	8.682 (+2)	6.119 (−2)	3.24 (−9)	0.00487	2.26 (−7)	99.7	557
10^{-3}	4,380	+3.5387	−0.6260	3.457 (+3)	2.366 (−1)	1.23 (−8)	0.0139	4.06 (−7)	99.5	420
10^{-2}	4,660	+4.1035	−0.0480	1.269 (+4)	8.953 (−1)	4.25 (−8)	0.0388	1.09 (−6)	98.6	283
0.05012	4,950	+4.4936	+0.3817	3.116 (+4)	2.408 (0)	9.81 (−8)	0.0799	3.43 (−6)	96.0	183
0.10000	5,160	4.6592	0.5966	4.562 (+4)	3.950 (0)	1.38 (−7)	0.110	8.49 (−6)	91.1	138
0.15849	5,330	4.7675	0.7569	5.854 (+4)	5.713 (0)	1.71 (−7)	0.140	1.69 (−5)	84.3	108
0.19953	5,430	4.8201	0.8476	6.608 (+4)	7.041 (0)	1.90 (−7)	0.160	2.47 (−5)	78.9	92.6
0.25119	5,540	4.8710	0.9478	7.430 (+4)	8.868 (0)	2.09 (−7)	0.187	3.68 (−5)	72.0	77.7
0.31623	5,650	4.9197	1.0523	8.311 (+4)	1.128 (+1)	2.29 (−7)	0.221	5.29 (−5)	64.6	63.1
0.39811	5,765	4.9659	1.1635	9.244 (+4)	1.457 (+1)	2.50 (−7)	0.264	7.51 (−5)	56.7	48.9
0.50119	5,890	5.0090	1.2847	1.021 (+5)	1.926 (+1)	2.70 (−7)	0.323	1.07 (−4)	48.4	35.4
0.63096	6,035	5.0492	1.4232	1.120 (+5)	2.650 (+1)	2.89 (−7)	0.407	1.58 (−4)	39.6	22.6
0.79433	6,200	5.0853	1.5782	1.217 (+5)	3.786 (+1)	3.06 (−7)	0.527	2.37 (−4)	31.0	10.8
1.00000	6,390	5.1173	1.7516	1.310 (+5)	5.644 (+1)	3.19 (−7)	0.706	3.65 (−4)	23.2	0.0
1.25892	6,610	5.1446	1.9443	1.395 (+5)	8.796 (+1)	3.29 (−7)	0.978	5.79 (−4)	16.6	−9.6
1.58489	6,860	5.1679	2.1520	1.472 (+5)	1.419 (+2)	3.34 (−7)	1.39	9.40 (−4)	11.6	−18.0
1.99526	7,140	5.1875	2.3701	1.540 (+5)	2.345 (+2)	3.36 (−7)	2.02	1.55 (−3)	7.9	−25.3
2.51189	7,440	5.2036	2.5879	1.598 (+5)	3.872 (+2)	3.34 (−7)	2.94	2.53 (−3)	5.4	−31.6
3.16228	7,750	5.2170	2.7968	1.648 (+5)	6.263 (+2)	3.30 (−7)	4.24	4.04 (−3)	3.8	−37.1
3.98107	8,030	5.2289	2.9731	1.694 (+5)	9.400 (+2)	3.27 (−7)	5.83	5.97 (−3)	2.9	−42.1
5.01187	8,290	5.2395	3.1271	1.736 (+5)	1.340 (+3)	3.24 (−7)	7.76	8.38 (−3)	2.2	−46.8
6.30957	8,520	5.2494	3.2565	1.776 (+5)	1.805 (+3)	3.22 (−7)	9.94	1.11 (−2)	1.8	−51.4
7.94328	8,710	5.2594	3.3595	1.817 (+5)	2.288 (+3)	3.21 (−7)	12.2	1.38 (−2)	1.6	−56.0
10.00000	8,880	5.2693	3.4487	1.859 (+5)	2.810 (+3)	3.21 (−7)	14.6	1.67 (−2)	1.4	−60.8
12.58925	9,050	5.2797	3.5349	1.904 (+5)	3.427 (+3)	3.22 (−7)	17.4	1.99 (−2)	1.2	−65.8
15.84893	9,220	5.2903	3.6183	1.951 (+5)	4.152 (+3)	3.23 (−7)	20.8	2.37 (−2)	1.1	−71.1
19.95262	9,390	5.3012	3.6989	2.001 (+5)	4.999 (+3)	3.24 (−7)	24.7	2.79 (−2)	1.0	−76.7
25.11886	9,560	5.3124	3.7769	2.053 (+5)	5.983 (+3)	3.25 (−7)	29.4	3.28 (−2)	0.9	−82.6

* The chromosphere lies above $\tau_{5000} \sim 10^{-6}$, the transition region is between $\tau_{5000} \approx 10^{-6}$ and 10^{-3}, and the photosphere lies below $\tau_{5000} \sim 10^{-3}$. The model is con-vectively unstable for $\tau_{5000} \lesssim 1$, but convection is efficient only below $\tau_{5000} \sim 2$.

In Tables 4-1 to 4-4, the optical depth τ_λ is evaluated either at 5000 Å or at 1.17 μ. The temperature T is expressed in °K; the total pressure P, the gas pressure P_g, and the electron pressure P_e in dyne cm^{-2}; the density ρ in gm cm^{-3}; and the absorption coefficient κ_λ in cm^2 gm^{-1}. The ratio $H^+/\Sigma H$ is the fraction (by number) of all hydrogen that is ionized, $\epsilon_{metals}/\Sigma\epsilon$ is the fraction of all electrons contributed by metals and F_C/F is the fraction of the total flux that is transferred by convection. The zero point of the geometrical depth (or height) x is arbitrary.

Auringon syvemmissä kerroksissa (T > 7000 K) ionisoituu vety, minkä seurauksena lämpötilagradientti kasvaa varsin suureksi. Tällöin energia ei siirrykään säteilynkuljetuksen vaan konvektion eli massavirtausten avulla. Konvektiota esiintyy alueissa, joissa opasiteetti on suuri. Auringon konvektiivinen kerros on teoreettisten mallien mukaan välillä $0.76\ R_o < r < 0.9995\ R_o$. Auringon pinnalla näkyvät granulaatiot ovat merkkejä tästä konvektiivisesta kerroksesta.

2.4.3 Varhaisen spektriluokan tähden atmosfäärimalli

Auringon reunatummumisilmiöön nojautuvaa empiiristä $T(\tau)$ riippuvuuden määritystä ei voida yleensä soveltaa muihin tähtiin. Havaintojen avulla saadaan siten ainoastaan säteilyn kokonaisvuon tiheys sekä tähden spektri selville. Atmosfäärimalleissa huolehditaan siitä, että

a) tähdestä ulos tuleva säteily vastaa havaittua kokonaisvuontiheyttä

b) säteilyenergian jatkuvuusyhtälö on voimassa kaikissa atmosfäärikerroksissa.

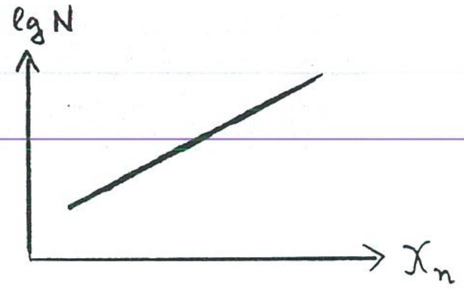
Klassisissa atmosfäärimalleissa oletetaan, että LTE, säteilytasapaino ja hydrostaattinen tasapaino ovat voimassa. Klassinen atmosfäärimalli lasketaan seuraavien pääperiaatteiden mukaisesti.

1) Perusparametrien määritys

a) Efektiivisen lämpötilan alkuarvo

LTE:ssä on $T_{eff} = T_{ex}$. Väärin valittu T_{ex} johtaa väärään atomin viritysenergian $\chi = E_n - E_m$ ja ko. atomilajin runsauden N väliseen riippuvuuteen.

Mittaamalla spektriviivojen pinta-alat voidaan metallirunsaus määrittää. Optisessa tähtitieteessä spektriviivan pinta-ala ilmoitetaan ns. ekvivalenttileveyden W avulla (kts. luku 2.5.6e).



Väärä riippuvuus

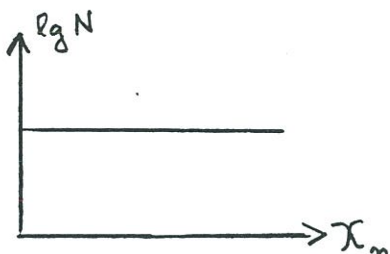
$$W = \text{vakio} \cdot N_n \quad , \text{ missä } N_n = \begin{cases} \text{alemman energiatason populaatio (absorpti} \\ \text{ylemmän energiatason populaatio (emissio)} \end{cases}$$

$$\text{Boltzmann :} \quad \frac{N_n}{N} = \frac{g_n}{u(T)}\, e^{-\chi_n / kT_{ex}}$$

$$\Rightarrow W = \text{vakio} \cdot N \cdot e^{-\chi_n/kT_{ex}} = \text{vakio} \cdot N \cdot 10^{-5040 \cdot \chi_n[\text{eV}]\,/T_{ex}}$$

$$\Rightarrow \lg N = \text{vakio} + \frac{5040}{T_{ex}} \cdot \chi_n$$

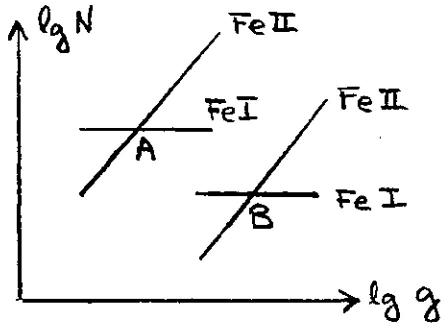
Interpoloimalla kokeiltava eri lämpötiloja (lähtöarvo väri-indeksin avulla) kunnes metallirunsaus N ei enää riipu absorptioviivan viritysenergiasta. Tämä $T_{ex} = T_{eff}$.



Oikea riippuvuus

b) Metallirunsauden ja pintagravitaation määritys

Metalli-ionien heikkojen viivojen ekvivalenttileveydet riippuvat pintagravitaatiosta, neutraalien metallien runsaus sen sijaan ei riipu gravitaatiokiihtyvyydestä. Ionisaatiotasapainossa ovat ko. atomilajin ionirunsaus ja neutraaliatomien runsaus yhtäsuuret. Esittämällä atmosfäärimallin antamat runsaudet pintagravitaation g funktiona saadaan oheinen kuvio. Kun metallipitoisuudelle ja gravitaatiokiihtyvyydelle käytetään kaksi eri lähtöarvoa, saadaan vastaavasti kaksi eri leikkauspistettä A ja B ja siten myös kaksi eri pintagravitaation arvoa.



Koska todellisuudessa pintagravitaation on kuitenkin oltava sama kummassakin tapauksessa, on interpoloimalla löydettävä sellainen metallipitoisuus [M/H] , että sekä mallin [M/H] että sen avulla lasketun metallirunsauden arvot ovat samat (kts. kuvaa seuraavalla sivulla). Kun oikea metallirunsaus on selvinnyt, saadaan yo. kuvassa leikkauspisteen oikea sijainti ja siten myös oikea pintagravitaatio selville. Tarkempi selvitys löytyy esim. David Grayn kirjasta : 'The Observation and Analysis of Stellar Photospheres' (1976, J.Wiley & Sons, New York).

2) Lämpötilajakautuman ensimmäinen approksimaatio $T^{(1)}(\tau)$

Lämpötilajakautuma $T(\tau)$ saadaan yhtälöllä

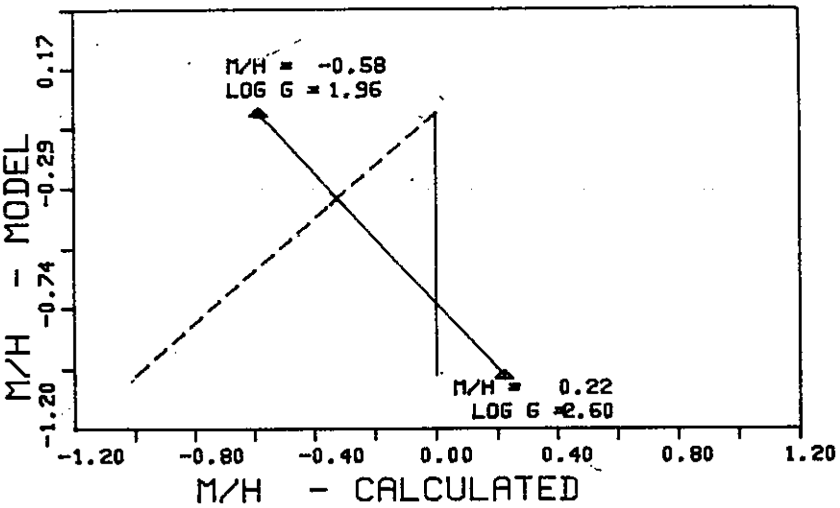
$$T^4(\tau) = \frac{1}{2} T_{eff} \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right)$$

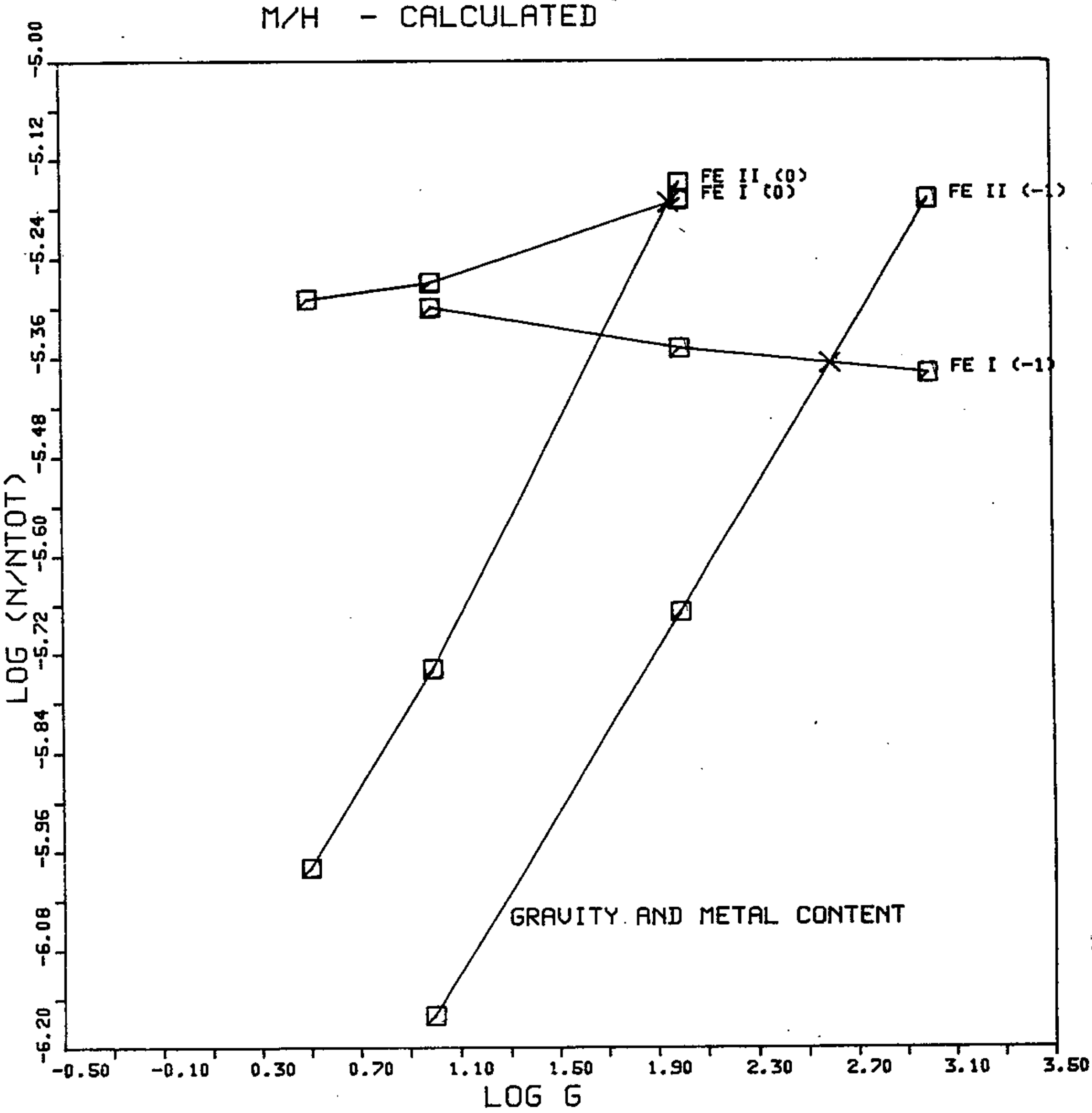
3) Painejakautuma $P(\tau)$

Painejakautumaa laskettaessa on huomioitava säteilyn ja materian vuorovaikutukset : terminen absorptio ja emissio sekä sironta, joka on tärkeä hyvin kuumissa tähdissä sekä tietyissä ylijättiläisissä. Optinen syvyys on tällöin $d\tau_\nu = -(k_\nu + \sigma_\nu)\rho\, dx$. Varhaisen spektriluokan tähdissä on lisäksi huomioitava säteilypaine

HD37160

LOG G = 2.09
M/H = -0.32





$$dP_\nu = \frac{\rho(k_\nu+\sigma)dx}{c}\,\mathcal{F}_\nu \qquad \text{(kts. luku 2.1.3c)}$$

jolloin kokonaispaine on $P = P_g + P_{rad}$.

Hydrostaattisen tasapainon oletuksella

$$dP = dP_g + dP_r = -g\rho\,dx + \frac{\rho dx}{c}\int_0^\infty (k_\nu+\sigma)\mathcal{F}_\nu\,d\nu$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{dP}{-(\bar{k}_\nu+\sigma)\rho dx} = \frac{g}{\bar{k}_\nu+\sigma} - \frac{1}{c}\,\frac{1}{\bar{k}+\sigma}\int_0^\infty (k_\nu+\sigma)\mathcal{F}_\nu\,d\nu$$

Ensimmäisessä approksimaatiossa jätetään säteilypaine ja sironta huomioimatta, jolloin

$$\frac{dP_g}{d\tau_0} = \frac{g}{k_0} \qquad k_0 = k(\lambda_0,T,P_e)\text{ , aallonpituus kiinnitetty}$$
$$k_0 = k(\lambda_0,T)\,P_e$$

Varhaisen spektriluokan tähdelle $T_{eff} \gtrsim 25000$ K, joten atmosfäärin vety on täydellisesti ionisoitunut. Tällöin $P_g \approx 2\,P_e$ (kts. s. 126).

$$\Rightarrow 2P_e\frac{dP_e}{d\tau} = \frac{g\cdot \cancel{P_e}}{k_0(\lambda_0,T(\tau_0))\cdot\cancel{P_e}}$$

$$\Rightarrow P_e^2 = \int_0^{\tau_0}\frac{g}{k_0(\lambda_0,T)}\,d\tau$$

Numeerisen integroinnin jälkeen saadaan $P_e^{(1)}$ ja siten $P^{(1)} \approx 2\,P_e^{(1)}$.

Toisessa approksimaatiossa huomioidaan sironta, jolloin

$$\frac{dP_g}{d\tau_0} = \frac{g}{k_0+\sigma}$$

$P_g \approx 2\,P_e$ saadaan jälleen numeerisella integroinnilla.

4) Pääiterointi : harmaa atmosfääri $\rightarrow$ reaalinen atmosfääri

Kun oletetaan säteilytasapaino, on jokaisella τ:n arvolla seuraava reunaehto oltava voimassa

$$\int \mathcal{F}_\nu(\tau_0)\,d\nu = \text{const}$$

$\mathcal{F}_\nu$ on siis laskettava jokaiselle aallonpituudelle ja eri syvyyksille τ_0 .

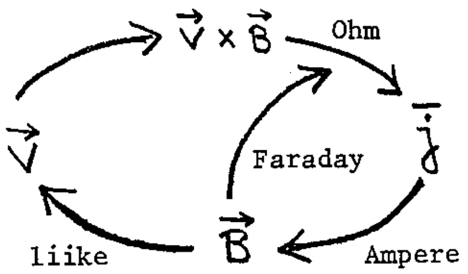
$$d\tau_\lambda = \frac{k_\lambda+\sigma}{k_0+\sigma}\,d\tau_0 \Rightarrow \tau_\lambda = \int\frac{k_\lambda+\sigma}{k_0+\sigma}\,d\tau_0 \qquad \left|\begin{array}{l} d\tau = -\rho(k+\sigma)dx \\ d\tau \propto (k+\sigma)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow T(\tau_\lambda)$$
$$\Rightarrow B(\tau_\lambda)$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}_\nu$$

Mikäli mallilaskuissa ehto $\int \mathcal{F}_\nu(\tau_0)d\nu$ = const ei päde, on $T(\tau)$ ja mahdollisesti $P(\tau)$ korjattava "vuo-iteraatiomenetelmällä", kunnes säteilyn kokonaisvuo pysyy vakiona tietyllä tarkkuudella.

HUOM. Atmosfäärimallia voidaan edelleen tarkentaa spektriviivahavaintojen avulla (kts. luku 2.6).

Klassiset atmosfäärimallit olettavat siis, että LTE, säteilytasapaino ja hydrostaattinen tasapaino ovat voimassa. Kuitenkin ei-radiatiivinen energiankuljetus, magneettikentät ja ei-termiset nopeuskentät indikoivat, että todellinen atmosfääri saattaa huomattavastikin poiketa klassisesta atmosfäärimallista. Semiklassisissa malleissa (Mihalas, 1978) pyritään huomioimaan atmosfäärin non-LTE-olosuhteet. Nykyiset UV-havainnot osoittavat kuitenkin,että myös semiklassiset atmosfäärimallit eivät oikein vastaa todellista atmosfääriä. Nykyään pyritään atmosfäärimalliin sisällyttämään myös dynaamisia ja magnetohydrodynaamisia ilmiöitä. Esimerkiksi dynamomallit huomioivat plasman ja magneettikentän väliset vuorovaikutukset (kts. alla olevaa periaatteellista kaaviokuvaa).



plasma liikkuu nopeudella $\bar{v}$ magneettikentässä

$\Downarrow$

indusoituu sähkökenttä $\bar{E} = \bar{v} \times \bar{B}$

$\Downarrow$

Ohmin lain mukaisesti syntyy virta, jonka virranvoimakkuus on $\bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$

$\Downarrow$

Amperen lain mukaisesti synnyttää virta magneettikentän $\nabla \times \bar{B} = \mu j$

$\swarrow$ $\searrow$

magneettikenttä synnyttää Lorentzin voiman $\bar{j} \times \bar{B}$, joka puolestaan aiheuttaa liikkeen

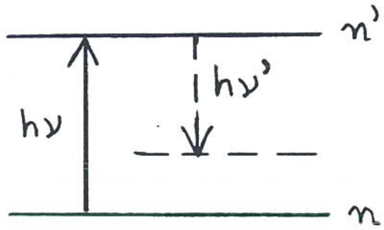
Faradayn lain mukaisesti magneettikenttä synnyttää sähkökentän $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

2.5 EKSTINKTIOPROSESSIT ASTROFYSIKAALISISSA KOHTEISSA

2.5.1 Yhteenveto ekstinktioprosesseista

ABSORPTIO:

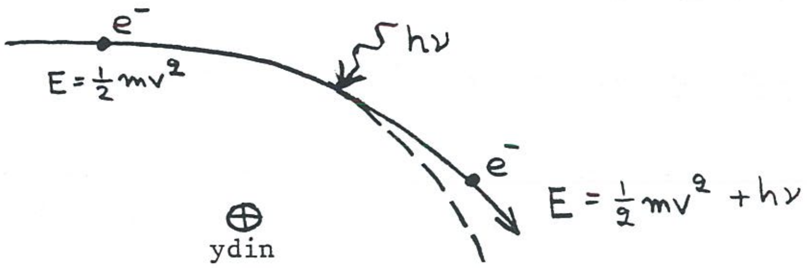
Atomi absorboi saapuvan fotonin ja re-emittoi sen myöhemmin toisella taajuudella.



Absorption eri lajit:

1) Viiva-absorptio (bound-bound absorption)
   Atomin sidoselektroni siirtyy sidotulta energiatilalta toiselle.
   Viiva-absorptiokertoimen merkintä säteilynkuljetusyhtälössä: ℓ_ν

2) Kontinuumiabsorptio
   a) bound-free absorptio
      Atomin elektroni siirtyy sidotulta energiatilalta vapaaseen energiatilaan (ts. elektroni poistuu atomista)
      Absorptiokeroimen merkintä: k_ν^{bf}
   b) free-free absorptio
      Ytimen kentässä liikkuva vapaa elektroni absorboi fotonin

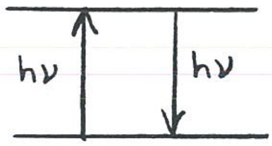


      Huom. elektronin oltava ytimen kentässä, sillä täysin vapaa elektroni ei voi absorboida säteilyä.
      Absorptiokertoimen merkintä: k_ν^{ff}

3) Molekyylin fotodissosiaatio

SIRONTA :

Koherentissa sironnassa atomi absorboi ja re-emittoi fotonin samalla taajuudella.



Sironnan ansiosta säteilyn intensiteetti heikkenee alkuperäisessä suunnassa :

Sironnasta johtuvan "absorptiokertoimen" merkintä : σ_ν

Sirottava hiukkanen voi olla
- elektroni
- atomi
- ioni
- molekyyli
- pölyhiukkanen

Sironnan erikoistapauksia :

a) Rayleigh-sironta, kun $\nu < \nu_0$ (ν_0 = elektronin resonanssitaajuus)

b) Thomson-sironta, kun $\nu > \nu_0$ (vapaille elektroneille $\nu_0 = 0$)

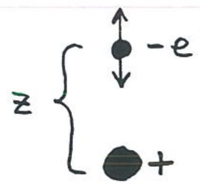
Sekä absorptio että sironta aiheuttavat sen, että säteilyn intensiteetti heikkenee alkuperäisessä suunnassa. Näitä säteilyä heikentäviä prosesseja kutsutaan yhteisesti ekstinktioksi.

EKSTINKTIO = ABSORPTIO + SIRONTA

2.5.2 Klassisen dipolin absorptio

a) Dipolisäteily

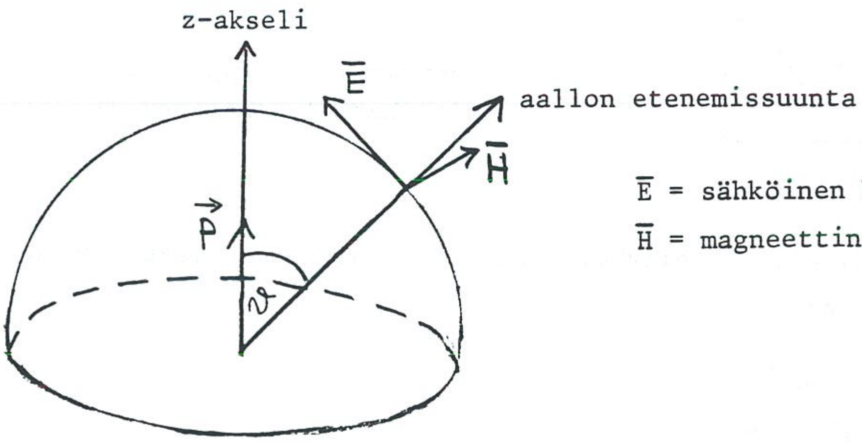
Kun dipolin dipolimomentti $\vec{p}$ muuttuu (esimerkiksi elektronin etäisyys z ytimeen muuttuu) lähettää dipoli ympäristöönsä sähkömagneettista säteilyä.



Syntyvän sähkömagneettisen aallon $\vec{E}$- ja $\vec{H}$- vektori ovat kohtisuorasti toisiaan vasten sekä aallon etenemissuuntaan nähden:

Kun r >> z, on $E_\vartheta = \frac{\ddot{p}}{c^2}\frac{\sin\vartheta}{r}$, $E_\varphi = 0$

$$H_\varphi = -\frac{\ddot{p}}{c^2}\frac{\sin\vartheta}{r} \quad , \quad H_\varphi = 0$$



$\bar{E}$ = sähköinen kenttävektori

$\bar{H}$ = magneettinen kenttävektori

Sähkömagneettisen säteilyn energiatiheys [erg/cm^3] on

$$u = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

Tasoaallolle $|H| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,|E|$

$$\Rightarrow \mu H^2 = \varepsilon E^2$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{4\pi}\varepsilon E^2$$

μ = tyhjön permeabiliteetti

ε = dielektrisyysvakio

Energiatiheyden virtaus = $\dfrac{dW}{dV}\cdot\underbrace{ds}_{v\,dt} = u\cdot v\,dt \quad \Big|:dt$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\text{teho}}{\text{cm}^2}$ = tehotiheys = $u\cdot\underbrace{v}_{\frac{c}{n}}$

$$\mathcal{P} = u\cdot\frac{c}{n} = \frac{1}{4\pi}\cdot\varepsilon E^2\cdot\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{4\pi}\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cdot|\bar{E}|}_{|\bar{H}|}\cdot|\bar{E}|$$

$$\mathcal{P} = \frac{c}{4\pi}|\bar{E}|\cdot|\bar{H}|$$

HUOM. Sähköopissa kutsutaan sähkömagneettisen aallon tehon virtausvektoria Poyntingin vektoriksi $\bar{S}$:

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi}\,\bar{E}\times\bar{H}$$

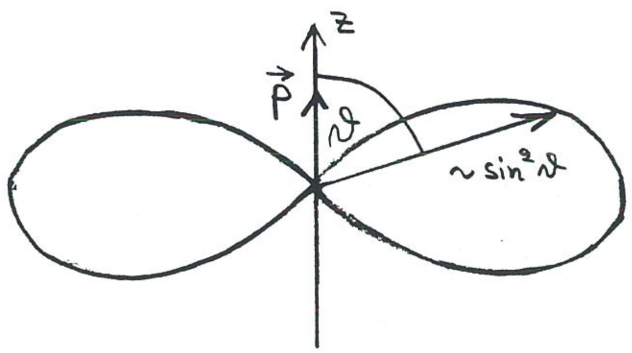
Tyhjössä $|\bar{E}| = |\bar{H}|$, joten

$$\mathcal{P} = \frac{c}{4\pi}E^2 = \frac{c}{4\pi}\,\frac{\ddot{p}^2}{c^4}\,\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3}\,\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}}$$

HETKELLINEN TEHOTIHEYS
(tarkastelupisteessä r)

Levossa olevan dipolin säteilykuvio eli tehotiheyden kulmajakauma on $\sin^2\vartheta$ - muotoinen:



Koska E muuttuu jaksollisesti nollan ja tietyn maksimiarvon E_o välillä, muuttuu myös $\mathcal{F}$ jaksollisesti. Keskimääräinen tehotiheys on siten

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle E^2 \rangle = \frac{c}{4\pi} E_o^2 \underbrace{\langle \sin^2 \omega t \rangle}_{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\langle \mathcal{F} \rangle = \frac{c}{8\pi} E_o^2}$$

KESKIMÄÄRÄINEN TEHOTIHEYS

<u>Kun tähtitieteessä puhutaan säteilyvuon tiheydestä tarkoitetaan sillä nimenomaan keskimääräistä tehotiheyttä $\langle \mathcal{F} \rangle$</u>.

<u>TEHT.</u> Aurinkovakio eli säteilyvuon tiheys Maan ilmakehän ulkopuolella on 2 cal/min·cm^2 = 1.39 10^6 erg/s cm^2. Laske sähköisen ja magneettisen kenttävektorin amplitudi.
Tyhjössä $|\vec{E}| = |\vec{H}|$, joten keskimääräinen teho/cm^2 on

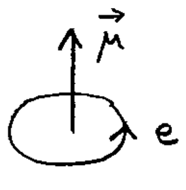
$$\langle \mathcal{F} \rangle = \frac{c}{8\pi} E_o^2$$

$$\Rightarrow E_o = \sqrt{\frac{8\pi}{c} \langle \mathcal{F} \rangle} = \sqrt{\frac{8\pi}{c} \cdot 1.39 \cdot 10^6 \frac{erg}{s \cdot cm^2}}$$

$$\underline{\underline{E_o = H_o = 10 \frac{V}{cm}}}$$

HUOM. Sähköisen dipolisäteilyn lisäksi on olemassa myös <u>magneettista dipolisäteilyä</u> .
Ympyrärataa kiertäävn varatun hiukkasen magneettinen dipolimomentti on :

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$, missä $\frac{q}{2m}$ = ns. gyromagneettinen suhde $= \left| \frac{\text{magn. momentti}}{\text{impulssimomentti}} \right|$



Elektronin spiniin liittyy myös magneettinen momentti, mutta vastaava gyromagneettinen suhde on $2 \cdot q/2m = q/m$.
Elektronin spinmagneettinen momentti aiheuttaa atomispektreissä hienorakennetta, ytimen magneettinen momentti taas ylihienorakennetta.

ESIM. Kun vety-ytimen spin ja elektronin spin ovat ensin samansuuntaiset ja muuttuvat sitten vastakkaissuuntaisiksi, lähettää atomi magneettista dipolisäteilyä, jonka aallonpituus $\lambda = 21$ cm.

b) Dipolin säteilyteho

Säteilyteho r-säteisen pallon pinnan läpi: $\int \bar{\mathcal{F}}\, d\omega = \int \frac{\ddot{p}}{4\pi c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2}\, d\omega$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{4\pi c^3}(e\ddot{z})^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{r^2}\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

värähtelevä dipoli menettää energiaa

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{e^2\ddot{z}^2}{4\pi c^3} \underbrace{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\theta\, d\phi}_{2\pi \cdot \frac{4}{3}}$$

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^2\ddot{z}^2}{c^3}}$$

DIPOLIN HETKELLINEN TEHO

Klassisen oskillaattorin keskimääräinen säteilyteho:

$$\boxed{\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = -\frac{16\pi^4\nu^4}{3c^3}\,p_o^2 = -\frac{8\pi^2\nu^2e^2}{3mc^3}\cdot W}$$ ... KESKIMÄÄRÄINEN TEHO

missä $p_o = ez_o$ = dipolimomentin maksimiarvo

$W = (1/2)kz_o^2 = (1/2)m\omega^2 z_o^2$ = oskillaattorin energia

(Kaavan johto harjoitustehtävänä)

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = -\gamma \cdot W$$, missä vaimennuskerroin $\gamma = \frac{8\pi^2\nu^2e^2}{3mc^3} = \frac{0.2223}{\lambda^2}\left[\frac{1}{s}\right]$

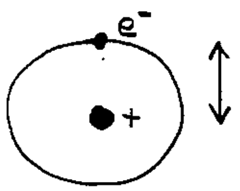
$$\Rightarrow \langle W \rangle = W_o e^{-\gamma t}$$

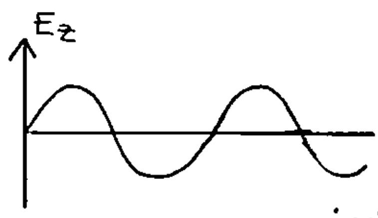
<u>HUOM.</u> $\frac{1}{\gamma} = T$ = aika, jonka kuluessa värähtely vaimenee osaan $1/e$

$\boxed{T = \frac{1}{\gamma}}$ = kyseisen värähtelytilan elinikä

c) <u>Klassisen oskillaattorin absorptiokerroin</u>

Yksinkertaisin malli säteilevälle atomille :





$$E_z = E_{oz}e^{i\omega t}$$

Valoaallon kohdatessa atomin, pakottaa se elektronin (massa m) liikkumaan valoaallon sähkökentän tahdissa.
Värähtelevän varauksen liikeyhtälö:

$$m\ddot{z} = \underbrace{-Kz}_{\text{harmoninen voima}} - \underbrace{g\dot{z}}_{\substack{\text{dissipatiivinen voima} \\ \text{(g=vaimennuskerroin)}}} + \underbrace{eE_z}_{\text{pakkovoima } = eE_{0z}e^{i\omega t}}$$

$$\ddot{z} = -\underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_0^2} z - \underbrace{\frac{g}{m}}_{\gamma} \dot{z} + \frac{eE_{0z}}{m} e^{i\omega t}$$

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{eE_{0z}}{m} e^{i\omega t}$$

Ratkaisuyrite : $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$

$\dot{z}(t) = i\omega z_0 e^{i\omega t}$

$\ddot{z}(t) = -\omega^2 z_0 e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow (-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2) z_0 e^{i\omega t} = \frac{eE_{0z}}{m} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_0 = \frac{\frac{eE_{0z}}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}}$$ ELEKTRONIN MAKSIMIPOIKKEAMA

$$\Rightarrow z = z_0 e^{i\omega t} = \frac{\frac{eE_{0z}}{m} \cdot e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

<u>HUOM.</u> Z_o on kompleksiluku, joten z ei ole samassa vaiheessa pakkovoiman kanssa.

Johdetaan seuraavaksi lausekkeet sähköisen dipolin absorptiokertoimelle κ sekä taitekertoimelle n.

Valon nopeus väliaineessa on

$v = \frac{c}{\tilde{n}}$, missä $\tilde{n}$ = kompleksinen taitekerroin

$\tilde{n}^2 = (n - i\kappa)^2 = \varepsilon$ = dielektrisyysvakio (tyhjössä $\varepsilon = 1$ väliaineessa $\varepsilon > 1$)

Ulkoinen kenttä synnyttää väliaineatomissa dipolimomentin:

$$\left.\begin{aligned} p(t) &= e \cdot z(t) \\ \vec{p} &= \alpha \cdot \vec{E} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{p}}{\vec{E}} = \frac{e\,z(t)}{E} = \frac{e z_0 e^{i\omega t}}{E_{0z} e^{i\omega t}} = \frac{e z_0}{E_{0z}}$$

α = dielektrinen suskeptibiliteetti (kuvaa polarisoituvuutta)

Dielektrinen siirtymä : $D = E + 4\pi N p = E + 4\pi N \alpha E = (1 + 4\pi N\alpha)E = \varepsilon E$

missä N = värähtelevien atomien lkm/cm^3

Sijoittamalla α dielektrisyysvakioon ε saadaan

$$\varepsilon = 1 + 4\pi N \frac{e z_0}{E_{0z}} = 1 + \frac{4\pi N e}{E_{0z}} \frac{e E_{0z}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}$$

$\varepsilon = (n - i\kappa)^2$
$\omega = 2\pi\nu$
$\omega_0 = 2\pi\nu_0$

$$(n - i\kappa)^2 = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{1}{4\pi^2(\nu_0^2 - \nu^2 + i\gamma\frac{\nu}{2\pi})}$$

$\sqrt{}$ Kun a<<1 $\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{1}{2} a$

$$n - i\kappa = 1 + \frac{Ne^2}{2\pi m} \frac{1}{(\nu_0^2 - \nu^2) + i\gamma\frac{\nu}{2\pi}}$$

lavennetaan lausekkeella : $(\nu_0^2 - \nu^2) - i\gamma\frac{\nu}{2\pi}$

$$n - i\kappa = 1 + \frac{Ne^2}{2\pi m} \frac{(\nu_0^2 - \nu^2) - i\gamma\frac{\nu}{2\pi}}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + (\gamma\frac{\nu}{2\pi})^2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} n = 1 + \dfrac{Ne^2}{2\pi m} \dfrac{\nu_0^2 - \nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \left(\gamma \frac{\nu}{2\pi}\right)^2} \\[2ex] \kappa = \dfrac{Ne^2}{2\pi m} \dfrac{\gamma \cdot \frac{\nu}{2\pi}}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \left(\gamma \frac{\nu}{2\pi}\right)^2} \end{cases}$$

Useinmiten ollaan kiinnostuneita absorptiokertoimesta lähellä resonanssitaajuutta ν_0 :

$$\nu \approx \nu_0 \Longrightarrow \nu - \nu_0 \ll \nu_0$$

$$\nu_0^2 - \nu^2 = \underbrace{(\nu_0 + \nu)}_{\approx 2\nu}(\nu_0 - \nu) \approx 2\nu(\nu_0 - \nu)$$

$$\Longrightarrow \quad \kappa = \frac{Ne^2}{2\pi m} \cdot \frac{\frac{\gamma\nu}{2\pi}}{[2\nu(\nu_0 - \nu)]^2 + \left(\frac{\gamma\nu}{2\pi}\right)^2}$$

$$\boxed{\kappa = \frac{Ne^2}{4\pi m\nu} \, \frac{\gamma/4\pi}{(\nu_0 - \nu)^2 + (\gamma/4\pi)^2}}$$

KLASSISEN OSKILLAATTORIN ABSORPTIOKERROIN

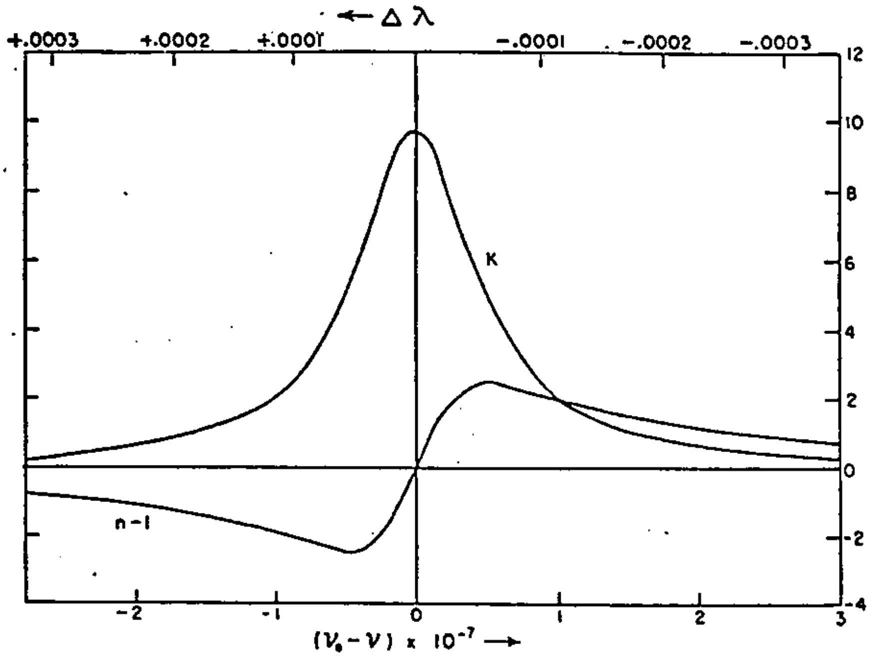
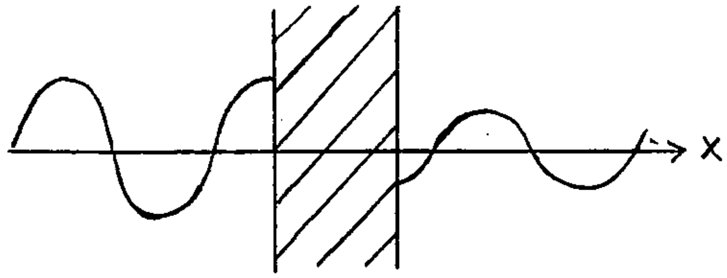


FIG. THE VARIATION OF $(n - 1)$ AND κ WITH FREQUENCY NEAR RESONANCE

The curves are computed for sodium atoms absorbing at the λ5890 (D_1) line. Notice the anomalous behavior of the index of refraction near resonance. The ordinates are arbitrary.

d) <u>Dipolin absorptiokertoimen κ ja massa-absorptiokertoimen k välinen yhteys</u>



Väliaineessa on sähkömagneettisen aallon yhtälö

$$E(x,t) = E_0 e^{i2\pi\nu(t-\frac{x}{v})} \qquad v = \frac{c}{\tilde{n}} = \frac{c}{n-i\kappa}, \quad \frac{x}{v} = \frac{x}{c}(n-i\kappa)$$

$$E(x,t) = \underbrace{E_0 e^{-2\pi\nu\kappa x/c}}_{\text{vaimeneva osa}} \cdot \underbrace{e^{i2\pi\nu(t-n\frac{x}{c})}}_{\text{jaksollinen osa}}$$

Intensiteetti $I \propto (\hat{E})^2$

$$\left.\begin{aligned} I(x) &= I_0 e^{-\frac{4\pi\nu\kappa}{c}\cdot x} \\ I(x) &= I_0 e^{-k\rho x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{k_\nu \rho = \frac{4\pi\nu}{c}\cdot\kappa}$$

Sijoittamalla tähän dipolin absorptiokertoimen lauseke κ_ν (lähellä ν_0) saadaan

$$\boxed{k_\nu \rho = \frac{N_{0\nu} e^2}{mc}\cdot\frac{\gamma/4\pi}{(\nu-\nu_0)^2+(\gamma/4\pi)^2} = N_{0\nu}\cdot\alpha_\nu}$$

missä $N_{0\nu}$ = niitten sidoselktronien lkm/cm^3, joiden ominaistaajuus on ν_0

γ = väliaineen vaimennuskerroin

$\alpha_\nu = \frac{e^2}{mc}\,\frac{\gamma/4\pi}{(\nu-\nu_0)^2+(\gamma/4\pi)^2}$ = absorptiokerroin yhdelle värähtelijälle = atomaarinen vaikutusala

$[\alpha_\nu] = cm^2$

HUOM. Massa-absorptiokertoimen kvanttimekaaninen muoto saadaan korvaamalla

$$\gamma \to \Gamma_{rad}$$

$$N_{o\nu} \to f \cdot N_{o\nu}$$

missä oskillaattorivoimakkuus f ilmoittaa värähtelevien elektronien efektiivisen lukumäärän/atomi ko. siirtymässä.

Esim. lähtötaso = n

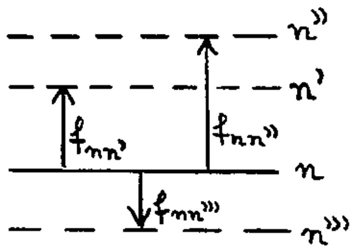
lopputasot esimerkiksi n', n'', n'''

värähtelevien elektronien efektiivinen

lkm/atomi = $f_{nn'} + f_{nn''} + f_{nn'''}$

(Thomas-Kuhnin summasääntö)

$$\sum_j f_{ij} = 1$$



e) Väliaineeseen absorboitunut säteilyteho P_ν

Edellisen kohdan mukaan absorptiokerroin/cm^3 on $k_\nu \rho = N_{o\nu} \alpha_\nu$

missä $N_{o\nu}$ = värähtelijöiden lkm/cm^3, jotka absorboituvat taajuudella ν

α_ν = absorptiokerroin yhdelle värähtelijälle

Tilavuusalkioon absorboitunut intensiteetti:

$$dI_\nu = \rho k_\nu I_\nu dx \qquad \Big| \quad dI_\nu = \frac{dP_\nu}{dA_\perp d\nu d\omega}$$

$$dP_\nu = \underbrace{\rho k_\nu}_{N_{o\nu}\alpha_\nu} I_\nu d\nu d\omega \underbrace{dA_\perp dx}_{dV = 1\,cm^3}$$

1 cm^3:iin absorboitunut teho :

$$P_\nu = N_{o\nu} I_\nu \int_0^{4\pi} d\omega \int_0^\infty \alpha_\nu d\nu$$

$$P_\nu = 4\pi I_\nu \cdot \underbrace{N_{o\nu} \int_0^\infty \alpha_\nu d\nu}_{\rho \bar{k}}$$

$$\boxed{P_\nu = 4\pi I_\nu \rho \bar{k}}$$

määritellään keskimääräinen absorptiokerroin $\bar{k}$:

$$\rho\bar{k} = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_\nu \, d\nu$$

$$\rho\bar{k} = \frac{N_{0\nu} e^2}{mc} \cdot \pi \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma/4\pi}{(\nu-\nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2} d(\nu-\nu_0)}_{=1}$$

sillä $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{\pi} \Big/_{-\infty}^{\infty} \arctan\frac{x}{a}$
$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\boxed{\rho\bar{k} = N_{0\nu} \cdot \frac{\pi e^2}{mc}}$$

missä $\frac{\pi e^2}{mc}$ = efektiivinen vaikutusala

Kvanttimekaaninen muoto:
$$\rho\bar{k} = N_{0\nu} \cdot f \cdot \frac{\pi e^2}{mc}$$

Yhteen kuutiosenttimetriin ainetta absorboituu yhdessä sekunnissa säteilyenergiaa:

$$\boxed{E_\nu = 4\pi I_\nu \rho \bar{k} \cdot 1s}$$

2.5.3 Säteilyn sirottuminen klassisesta oskillaattorista

Sähkömagneettisen aallon ($\lambda > 0.5Å$) kohdatessa atomin vaikuttaa se atomin elektroniin voimalla $q\vec{E}$, jonka seurauksena elektroni alkaa värähdellä saapuvan aallon tahdissa. Atomin dipolimomentin muuttuessa jaksollisesti elektroni lähettää ympäristöönsä säteilyä, jonka taajuus on sama kuin saapuvan aallon taajuus. Klassisessa teoriassa sironnan vaikutusala

$$\sigma = \frac{\text{sironnassa menetetty keskimääräinen säteilyteho}}{\text{saapuvan sm-aallon keskimääräinen teho/cm}^2}$$

ei riipu atomin elektroniverhonrakenteesta. Kvanttimekaaninen tarkastelu puolestaan osoittaa, että sironnan vaikutusala on hyvin erilainen eri siirtymille. Kvanttimekaaninen vaikutusala voidaan esittää muodossa

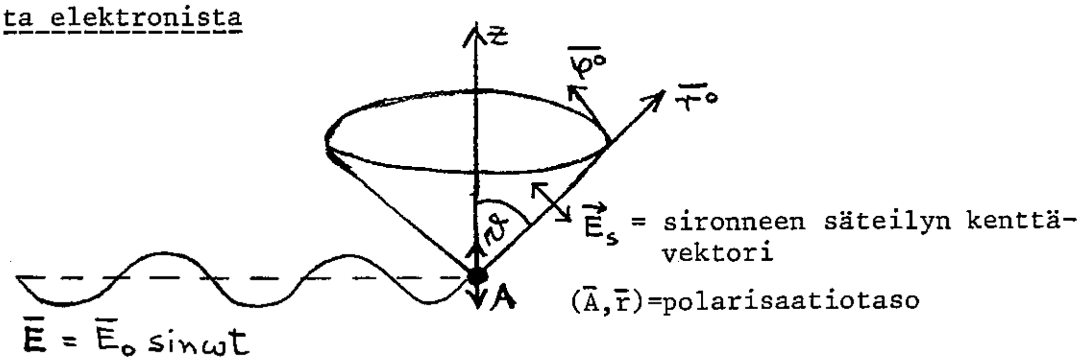
$\sigma = \sigma_{class} \cdot f_{ij}$, missä σ_{class} = sironnan klassinen vaikutusala
f_{ij} = siirtymän $i \rightarrow j$ oskillaattorivoimakkuus

Sironnan ei tarvitse tapahtua systeemin resonanssitaajuudella. Esimerkiksi Auringon valon sirottuessa ilmakehän molekyyleistä on valon taajuus huomattavasti pienempi kuin typpi- ja happimolekyylien UV-alueella olevat resonanssitaajuudet ν_0. Toisaalta röntgensäteiden sirottuessa atomin ulommista elektroneista tai vapaista elektroneista on saapuvan aallon taajuus $\nu \gg \nu_0$. Seuraavassa tarkastelemme lähemmin näitä kahta tärkeää ääritapausta.

a) Thomsonin sironta ($\nu \gg \nu_0$)

Vapaalle elektronille "resonanssitaajuus" $\nu_0 = 0$, joten ehto $\nu \gg \nu_0$ on voimassa. Thomsonin sironta on merkittävä hyvin kuumien tähtien atmosfääreissä. Myös Auringon koronan (ns. K-korona) valo on vapaista elektroneista sironnutta valoa. (Auringon F-koronan valo sen sijaan on interplanetaarisesta pölystä sironnutta valoa.)

1) Lineaarisesti polarisoituneen säteilyn sirottuminen yhdestä vapaasta elektronista



Liikkuvan varauksen kenttä:

$$\bar{E} = -\frac{q}{4\pi}\left[\frac{\overline{r^o}}{r^2} + \frac{r}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{r^o}}{r^2}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\overline{r^o}\right]$$

Suorittamalla derivointi ja huomioimalla ainoastaan asymptoottisesti vallitsevat termit ($\sim 1/r$) saadaan säteilykentän lausekkeeksi

$$\bar{E}_s = -\frac{q}{4\pi c^2}\frac{a_\perp}{r}\overline{\varphi^o}$$

, missä $a_\perp$= sironneen säteilyn etenemissuuntaa vasten kohtisuorasti oleva kiihtyvyyskomponentti.

Oletetaan, että varauksen nopeus $v \ll c$, jolloin voima $q\bar{E} \gg (q/c)\bar{v}\times\bar{H}$.

Elektronin liikeyhtälö on tällöin

$$m\ddot{z} = -eE = -eE_o \sin\omega t \qquad \left|\; \begin{aligned} z &= A\sin\omega t \\ \ddot{z} &= -A\omega^2 \sin\omega t \end{aligned}\right.$$

$$-A\omega^2 m = -eE_o \implies A = \frac{eE_o}{m\omega^2}$$

Sironneen aallon kenttävoimakkuus:

$$E_s = \frac{e}{4\pi c^2}\frac{\overbrace{\ddot{z}\sin\vartheta}^{a_\perp}}{r} \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan } \ddot{z} \text{ ja } A$$

$$\bar{E}_s = \frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{mc^2}\frac{\sin\vartheta}{r}\underbrace{E_o\sin\omega t}_{E}\overline{\varphi^o}$$

Elektronin klassinen säde r_o määritellään: $m_o c^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{r_o}$

$$\implies r_o = \frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{m_o c^2}$$

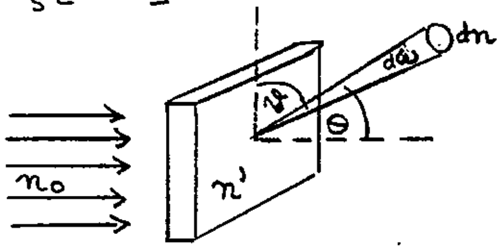
cgs-järjestelmässä:

$$r_o = \frac{e^2}{m_o c^2}$$

$$\frac{E_s}{E} = \frac{r_0}{r} \sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_s}{I} = \frac{E_s^2}{E^2} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \sin^2\vartheta$$

Atomifysiikassa määritellään sironnan differentiaalinen vaikutusala $\sigma_s \left[cm^2/sr\right]$ seuraavasti.



n_0 = saapuvien hiukkasten lkm/s

dn = suunnassa Θ havaittujen hiukkasten lkm/s

n' = kohtiohiukkasten lkm/pinta-alayksikkö

$$dn = \sigma_s(\Theta,\phi)\cdot n_0\cdot n'\cdot d\omega$$

Säteilyintensiteetille pätee vastaavasti

$$I_s = \sigma_s(\Theta,\phi)\cdot I_0\cdot n'\,d\omega$$

, missä I_s = kulmaan Θ sironnut intensiteetti

I_0 = saapuvan säteilyn intensiteetti

Koska tarkasteluesimerkissä sirottavana hiukkasena on yksi elektroni, on n' = 1/dA

$$\Rightarrow \quad \sigma_s(\Theta,\phi) = \frac{I_s\,dA}{I_0\,d\omega} = \frac{I_s\,dA}{I_0\frac{dA}{r^2}} = \frac{I_s}{I_0}r^2 \qquad \left|\ \frac{I_s}{I_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \sin^2\vartheta\right.$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_s(\Theta,\phi) = r_0^2\sin^2\vartheta = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\vartheta$$

Käytettäessä ϑ:n asemasta sirontakulmaa $\Theta = 90^0 - \vartheta$ on

$$\boxed{\sigma_s(\Theta,\phi) = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cos^2\Theta}$$

VAPAAN ELEKTRONIN DIFFERENTIAALINEN VAIKUTUSALA LINEAARISESTI POLARISOITUNEELLE SÄTEILYLLE

Nähdään, että vapaan elektronin vaikutusala on riippumaton saapuvan aallon taajuudesta.

Sironnan kokonaisvaikutusala σ_T (total cross section tai lyhyesti vain cross section) saadaan integroimalla yli kaikkien suuntien:

$$\sigma_T = \oint \sigma_s \, d\omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma_s \sin\vartheta \, d\vartheta \qquad \Big| \qquad \sigma_s = r_0^2 \sin^2\vartheta$$

$$= 2\pi r_0^2 \int_0^\pi \sin^3\vartheta \, d\vartheta = \frac{8}{3}\pi r_0^2$$

$$\boxed{\sigma_T = \frac{8}{3}\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = 6.65\cdot 10^{-25}\,\mathrm{cm}^2}$$ SIRONNAN KOKONAISVAIKUTUSALA VAPAALLE ELEKTRONILLE

HUOM.1 Koska $\sigma_T \sim 1/m^2$, voidaan todeta, että protonin aiheuttaman sironnan vaikutusala on $(m_p/m_e)^2 \approx 10^6$ kertaa pienempi kuin vapaan elektronin vaikutusala.

HUOM.2 Atomiin harmoonisesti sidottua elektronia (ominaistaajuus ω_0) voidaan pitää likimääräisesti vapaana, jos elektronin sidosenergia on pieni (esim. kevyet atomit) ja saapuvan säteilyn energia on suuri (esim. pitkäaaltoinen röntgensäteily). Sidotun elektronin liikeyhtälö:

$$m\ddot{z} = \underbrace{-m\omega_0^2 z}_{\text{sidosta kuvaava harmoninen termi}} - eE_0 \sin\omega t$$

Värähtelevän elektronin amplitudiksi tulee tällöin

$$A = \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

ja sironnan vaikutusalaksi saadaan

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma(\text{Thomson})}{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}}$$

Atomiin löyhästi sidotun elektronin sironnan vaikutusala riippuu täten saapuvan säteilyn taajuudesta. Todettakoon, että lyhytaaltoisen röntgensäteilyn tapauksessa sironnan vaikutusala pienenee voimakkaasti kvanttifysikaalisten ja suhteellisuusteoreettisten efektien takia.

2) Sironta monesta elektronista

Tarkastellaan edelleen yksinkertaisuuden vuoksi lineaarisesti polarisoitunutta säteilyä. Tällöin vapaista elektroneista sironneilla aalloilla on vain vaihe-eroja δ_n.

$$\bar{E}_s = \sum_0^N \bar{E}_{sn} = \bar{E}_{so} \sum_0^N e^{i\delta_n} \qquad \text{missä } E_{so} = \frac{r_o}{r} \sin\vartheta \cdot E_o \sin\omega t$$

$$\Rightarrow I_s = I_{so} \left| \sum_0^N e^{i\delta_n} \right|^2$$

$$= I_{so} \sum_n e^{i\delta_n} \cdot \sum_m e^{-i\delta_m}$$

$$= I_{so} \Big(\underbrace{\sum_{n=m}^N e^{i(\delta_n - \delta_m)}}_{N} + \underbrace{\sum_{n \neq m}^N e^{i\overbrace{(\delta_n - \delta_m)}^{\delta_{nm}}}}_{2\sum_{n>m} e^{i\delta_{nm}}} \Big)$$

$$= I_{so} N \left(1 + \frac{2}{N} \sum_{n>m}^N e^{i\delta_{nm}} \right)$$

Ääritapaukset:

1⁰ Sironta tapahtuu kaikkiin suuntiin (ns. isotrooppinen sironta)

$\Rightarrow$ δ_{nm} jakautunut tasaisesti välillä $[0, 2\pi]$

$\Rightarrow$ $\sum e^{i\delta_{nm}} = 0$

$\Rightarrow$ $I_s = N \cdot I_{so}$, missä I_{so} = yhden elektronin sirottama säteilyintensiteetti I_{el}.

$$I_s = N \cdot I_{el}$$

2⁰ Hiukkasen koko a << λ (esim. valoaalto)

$\Rightarrow$ kaikki N elektronia värähtelevät tahdissa

$\Rightarrow$ $\delta_n = 0$

$$\Rightarrow I_s = I_{so} \left| \sum_0^N e^{i\delta_n} \right|^2 = I_{el} \cdot N^2$$

Yleisessä tapauksessa sironneen säteilyn intensiteetti vaihtelee näiden kahden ääritapauksen välillä:

$$\boxed{N I_{el} < I_s < N^2 I_{el}}$$

HUOM. I_s riippuu yleisessä tapauksessa sekä aallonpituudesta että sirontakulmasta (θ:n kasvaessa kasvaa aaltojen vaihe-ero δ_n).

3) Polarisoitumattoman säteilyn Thomsonin sironta

Yhdistämällä kaksi lineaarisesti polarisoitunutta aaltoa, jotka ovat kohtisuorasti toisiaan vasten sekä etenemisssuuntaan nähden, saadaan kaikki polarisaatiotapaukset:

$\overline{E} = \overline{E}_x + \overline{E}_z$, missä $E_x = E_1 \sin\omega t$ ($\parallel$ x-akseli)

$E_z = E_2 \sin(\omega t + \delta)$ ($\parallel$ z-akseli)

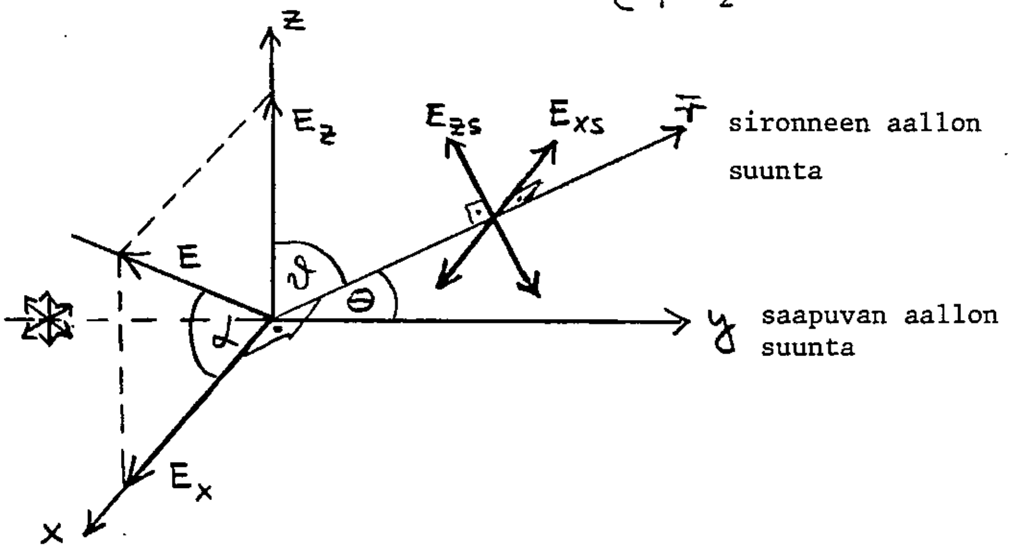
δ = aaltojen välinen vaihe-ero

Lineaarisesti polaroituneessa aallossa $\delta = n\pi$

Ympyräpolaroituneessa aallossa $\begin{cases} \delta = (2n+1)\pi/2 \\ E_1 = E_2 \end{cases}$

Elliptisesti polaroituneessa aallossa $\delta \neq n\pi$

Polarisoitumattomassa aallossa $\begin{cases} \delta \text{ mielivaltainen} \\ E_1 = E_2 \end{cases}$



Sironneen säteilyn kenttävektorin kohtisuorat komponentit:

$$E_{zs} = E_z \cdot \frac{r_0}{r} \underbrace{\sin\vartheta}_{\cos\Theta} = (\underbrace{E_0 \sin\omega t}_{E} \sin\alpha) \frac{r_0}{r} \cos\Theta \qquad \parallel \text{ z-akseli}$$

$$E_{xs} = E_x \cdot \frac{r_0}{r} \sin 90^\circ = (E_0 \sin\omega t \cos\alpha) \frac{r_0}{r} \qquad \parallel \text{ x-akseli}$$

$$\frac{I_s}{I_0} = \frac{E_{xs}^2 + E_{zs}^2}{E^2} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\Theta)$$

Huomioimalla, että polarisoitumattomassa aallossa α on tasaisesti jakautunut välille $[0,2\pi]$, on

$$\langle \cos^2\alpha \rangle = \langle \sin^2\alpha \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{I_s}{I_0} = \left\langle \frac{I_s}{I_0} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 (1+\cos^2\theta)$$

Luonnollisen valon tapauksessa on sironnan differentiaalinen vaikutusala siten

$$\sigma_s(\theta,\phi) = \left\langle \frac{I_s}{I_0} \right\rangle r^2 = \frac{1}{2} r_0^2 (1+\cos^2\theta)$$

$$\boxed{\sigma_s(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\theta)}$$

VAPAAN ELEKTRONIN DIFFERENTIAALINEN VAIKUTUSALA POLARISOITUMATTOMALLE SÄTEILYLLE

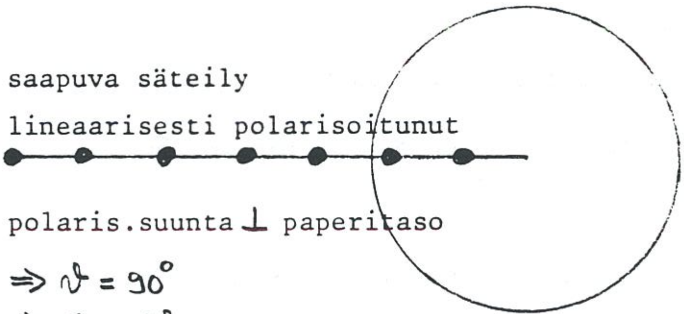
Kokonaisvaikutusala sen sijaan on sama kuin lineaarisesti polarisoituneen säteilyn tapauksessa:

$$\sigma_T = \int \sigma_s(\theta,\phi)\, d\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot 2\pi \underbrace{\int_0^\pi (1+\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta}_{\Big/_0^\pi -\cos\theta \,+\, \frac{1}{3}\Big/_0^\pi -\cos^3\theta \,=\, \frac{8}{3}}$$

$$\boxed{\sigma_T = \frac{8}{3}\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2}$$

SIRONNAN KOKONAISVAIKUTUSALA

Yhteenveto vapaasta elektronista sironneen säteilyn kulmajakautumasta eli sirontafunktiosta:

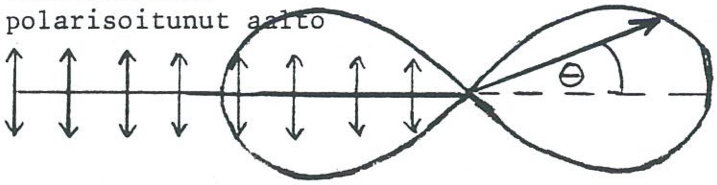


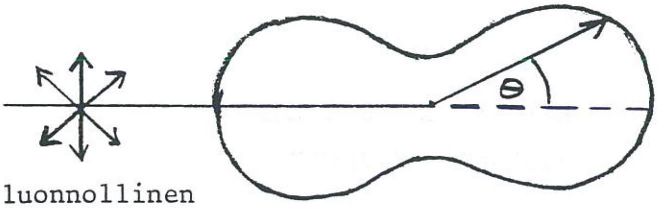
Isotrooppinen sirontafunktio (ei θ-riippuvuutta)

$$\Rightarrow \vartheta = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 0^\circ$$

$$\Rightarrow \sigma_s = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = \text{vakio}$$





Vapaat elektronit sirottavat polarisoitumatonta valoa sekä eteen- että taaksepäin.

b) Rayleighin sironta ($\nu \ll \nu_0$)

Rayleigh oli ensimmäinen, joka tutki (v. 1871) valon sirottumista hiukkasista, joiden koko on valon aallonpituutta huomattavasti pienempi. Rayleighin sirontaa aiheuttavat keveisiin atomeihin ja molekyyleihin sidotut elektronit, joitten ominaistaajuus ν_0 on UV-alueessa.

Luvussa 2.5.2.d saatiin dipolin absorptiokertoimen κ ja tilavuusabsorptiokertoimen ϱk_ν välille yhteys

$$\varrho k_\nu = \frac{4\pi\nu\kappa}{c}$$

resonanssikohdan ulkopuolella:

$$\kappa = \frac{Ne^2}{2\pi m}\,\frac{\gamma\nu}{2\pi}\,\frac{1}{(\nu_0^2-\nu^2)^2+\left(\frac{\gamma\nu}{2\pi}\right)^2}$$

Koska $\nu \ll \nu_0 \Rightarrow |\nu_0-\nu| \gg \gamma = \frac{8\pi^2\nu^2 e^2}{3mc^3} = \frac{0.2223}{\lambda^2}$

voidaan nimittäjän viimeinen termi jättää huomioimatta:

$$\kappa = \frac{Ne^2}{4\pi^2 m}\,\frac{8\pi^2\nu^3 e^2}{3mc^3}\,\frac{1}{\left[\nu^2\left(\frac{\nu_0^2}{\nu^2}-1\right)\right]^2}$$

voidaan jättää huomioimatta, koska $\nu_0 \gg \nu$

$$\Rightarrow \rho k_\nu = N \cdot \underbrace{\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2}_{\sigma_T = \sigma_{el}} \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^4$$

$\sigma_T = \sigma_{el}$ = vapaan elektronin vaikutusala (Thomsonin vaikutusala)

$$\boxed{\rho k_\nu = N \cdot \sigma_{el} \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4}$$

RAYLEIGHIN SIRONTAKAAVA
(sironnasta johtuva säteilyn heikkeneminen alkuperäisessä suunnassa)

Atomaarinen sironnan vaikutusala saadaan yhteydestä

$$\rho k_\nu = N \cdot \sigma_{at}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{at} = \sigma_{el} \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4}$$

RAYLEIGHIN SIRONNAN ATOMAARINEN VAIKUTUSALA

Nähdään, että Rayleighin sironta riippuu voimakkaasti saapuvan säteilyn aallonpituudesta. Koska siniselle valolle vaikutusala on noin $2^4 = 16$ kertaa suurempi kuin punaiselle valolle, sirottuu luonnollisen valon sininen valokomponentti voimakkaammin. Esimerkiksi taivaan sinisyys johtuu juuri auringonvalon Rayleigh-sironnasta ilmakehän molekyyleistä. Rayleighin sirontaa esiintyy myös kylmien tähtien atmosfääreissä.

HUOM.1 Rayleighin sironta on epäisotrooppista. Kulmariippuvuus $P(\theta) = 3/4(1+\cos^2\theta)$ on samanmuotoinen kuin Thomsonin sironnassa.

HUOM.2 Luonnollinen valo polarisoituu voimakkaasti Rayleighin ja Thomsonin sironnassa. Polarisaatioaste on suurimmillaan, kun sirontakulma $\theta \approx 90^0$.

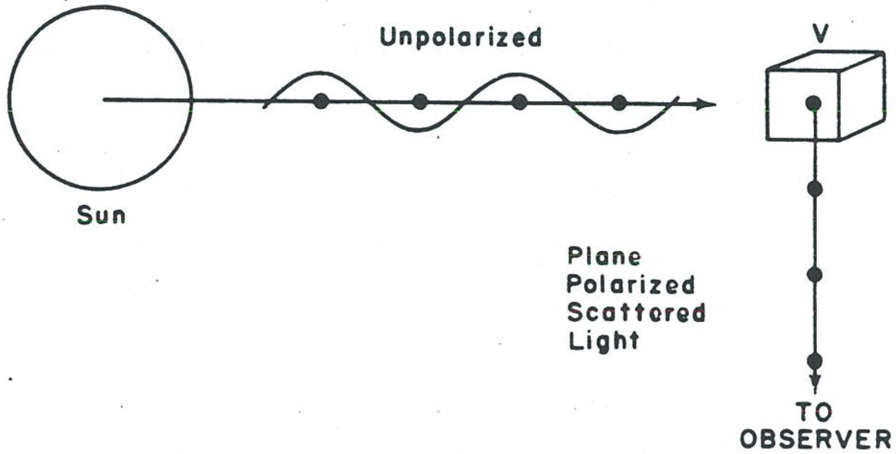


FIG. POLARIZATION OF LIGHT BY THE CORONA

Unpolarized light from the sun, (regarded for the purposes of the present discussion as a point source) hits the volume element V. Electrons vibrating perpendicular to the plane of the paper scatter light with the electric vector in this plane. Light scattered by those vibrating in the plane of the paper do not reach the observer. Hence photospheric light scattered in V would be plane-polarized. The light received by an observer is only partially polarized because contributions come from volume elements along the line of sight and because the sun is not a point source. These effects can be handled quantitatively.

c) Valon sirottuminen pölyhiukkasista

Myöhäisen spektriluokan tähdillä on usein pölyvaippa ympärillään, joten näissä tiheissä atmosfääreissä säteily sirottuu pölyhiukkasista. Tämän lisäksi valo sirottuu myös interstellaarisesta sekä interplanetaarisesta pölystä.

Johdetaan seuraavassa sironnan vaikutusala pölyhiukkaselle, jonka koko a << λ. Hiukkasen elektronit värähtelevät tällöin tahdissa, ja syntyneet dipolit ovat kaikki samanvaiheisia. Lisäksi oletetaan, että molekyylit eivät itse omaa permanenttia dipolia, vaan ulkoinen kenttä indusoi dipolimomentit.

Sironnan vaikutusalan määrittelee yhtälö

$$\sigma = \frac{\text{sironnassa menetetty keskimääräinen säteilyteho}}{\text{saapuvan aallon keskimääräinen teho/cm}^2}$$

Yhden dipolin menettämä keskimääräinen säteilyteho on (kts. luku 2.5.2.b)

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{16\pi^4 \nu^4}{3c^3} p_0^2$$

, missä $p_0 = ez_0$ = dipolimomentin maksimiarvo

Ratkaisemalla elektronin liikeyhtälö

$$m\ddot{z} + Kz = -eE_0 e^{i\omega t}$$ saadaan

$$z = -\frac{eE_0 e^{i\omega t}}{K - m\omega^2} \qquad \Big| \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$z = -\frac{eE_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{e^2 E_0}{4\pi^2 m(\nu_0^2 - \nu^2)}$$

Olkoon N_0 hiukkastilavuudessa V olevien atomien lukumäärä. Tällöin N_0:n dipolin menettämä keskimääräinen säteilyteho on

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{16\pi^4 \nu^4}{3c^3} (N_0 p_0)^2$$

$$= \frac{N_0^2 e^4 \nu^4 E_0^2}{3m^2 c^3 (\nu_0^2 - \nu^2)^2}$$

Toisaalta sähkömagneettisen aallon tyhjössä mukanaan kuljettama keskimää-räinen teho/cm^2 on (kts. luku 2.5.2.a)

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \frac{c}{4\pi}\langle E^2\rangle = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \underbrace{\langle \sin \omega t\rangle}_{\frac{1}{2}} = \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

Sironnan vaikutusala pölyssä on siten

$$\sigma = \frac{\langle \frac{dW}{dt}\rangle}{\langle \mathcal{F}\rangle} = \frac{8\pi e^4 \nu^4 N_0^2}{3m^2 \underbrace{c^4}_{\nu\lambda} (\nu_0^2-\nu^2)^2}$$

$$\sigma = \frac{8\pi e^4 N_0^2}{3m^2\lambda^4}\frac{1}{(\nu_0^2-\nu^2)^2}$$

Taajuuslauseke voidaan kytkeä kiinteän aineen dispersiokaavaan:

$$\frac{1}{\nu_0^2-\nu^2} = \frac{3\pi m}{Ne^2}\,\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \quad \text{, missä } N = \frac{N_0}{V}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{24\pi^3}{\lambda^4}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2\cdot V^2}$$

, missä V = pölyhiukkasen tilavuus

λ = säteilyn aallonpituus

$\epsilon = (n-ik)^2$ = dielektrisyysvakio

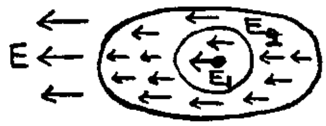
Ylikurssia: Kiinteän aineen dispersiokaavan johto:

Kun dipolit ovat kaukana toisistaan, on polarisoituminen

$$\bar{P} = \frac{\Sigma \bar{p}_i}{V} = N\alpha\bar{E}$$, missä α = atomin polarisoituvuus (dielektrinen suskeptibiliteetti)

Kiinteässä aineessa on huomioitava naapuridipolien aiheuttama vuorovaikutus. Sähkökenttä $\bar{E}$ korvataan tällöin tarkasteluatomin kohdalla vallitsevalla paikallisella kentällä

$\bar{E}_{loc} = \bar{E} + \bar{E}_1 + \bar{E}_2$, missä



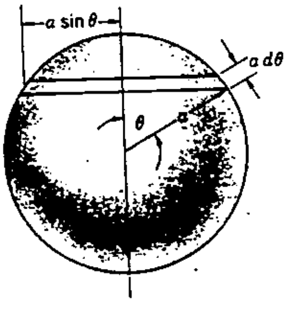
$\bar{E}$ = makroskooppinen kenttä

$\bar{E}_1$ = fiktiivisen onkalon (jonka keskustassa tarkasteltava atomi) sisäpuolella oleva kenttä, joka riippuu aineen rakenteesta. Kuutio- ja pallosymmetrisessä tapauksessa $\bar{E}_1 = 0$.

$\bar{E}_2$ = fiktiivisen onkalon ulkopuolella olevien dipolien aiheuttama kenttä. Merkitään $-P\cos\theta$ = pintavaraustiheys onkalon sisäpuolisella pinnalla. Tämä pintavaraus synnyttää pallon keskipisteessä kentän

$$E_2 = \int_0^{\pi} \frac{2\pi a \sin\theta}{a^2}\cdot a\,d\theta\cdot P\cos\theta\cdot \cos\theta = \frac{4\pi}{3}P$$

$\uparrow$ $\bar{E}$:n suunt. komponentti



Charge on ring = $2\pi a \sin\theta \cdot a\,d\theta \cdot P\cos\theta$

Polarisoitumisen lauseke on täten

$$\bar{P} = N\alpha \bar{E}_{loc} = N\alpha\left(\bar{E} + \frac{4\pi}{3}\bar{P}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{P}{E} = \frac{N\alpha}{1 - \frac{4\pi}{3}N\alpha}$$

Toisaalta:

$$\epsilon = \frac{D}{E} = 1 + 4\pi\frac{P}{E}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{E} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{4\pi}{3}N\alpha$$

Polaroituvuus α saadaan yhtälöparista

$$p = \alpha E = \alpha E_0 e^{i\omega t}$$

$$p = -ez = \frac{e^2 E_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi e^2 N}{3m(\omega_0^2 - \omega^2)} \qquad \Big| \; \omega = 2\pi\nu$$

Mikäli kussakin atomissa värähdysliikkeeseen osallistuu useampi kuin yksi elektroni, on

$$\boxed{\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{Ne^2}{3\pi m}\sum_i \frac{f_i}{\nu_{0i}^2 - \nu^2}}$$

KIINTEÄN AINEEN DISPERSIOKAAVA

missä f on ns. oskillaattorivoimakkuus.

HUOM. Hiukkasen kokonaispolarisoituvuus koostuu seuraavista osatekijöistä:

$$\alpha_{tot} = \alpha_{electronic} + \alpha_{ionic} + \underbrace{\alpha_{orientational}\,(\text{dipolar})}_{\text{kun molekyylillä permanentti dipoli}}$$

Optisella alueella vaikuttaa α:n reaaliosa-arvoon ja siten ϵ:n reaaliosan eli taitekertoimen arvoon ($\epsilon_{optical} = n^2$) miltei yksinomaan elektronien polarisoituvuus kuten seuraavasta kuvasta näkyy.

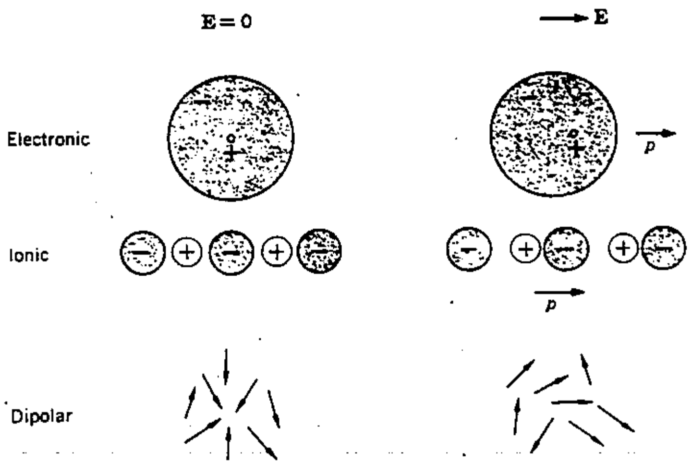


Figure 11 Contributions to the polarizability.

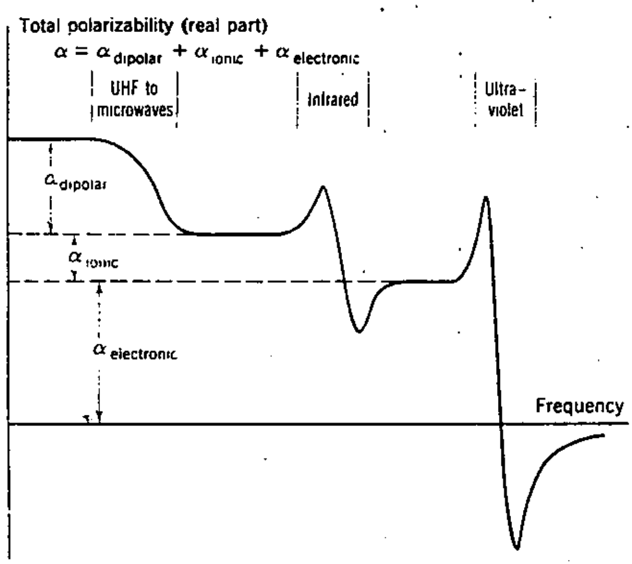


Figure Frequency dependence of the several contributions to the polarizability (schematic).

Huom. Ylikurssijakso päättyy tähän.

Mikäli pölyhiukkanen oletetaan pallomaiseksi (säde a), on sironnan vaikutusala

$$\sigma = \frac{24\pi^3}{\lambda^4}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2\cdot\left(\frac{4\pi}{3}a^3\right)^2$$

$\epsilon = n^2$ (dielektrisille hiukkasille)

$x = 2\pi a/\lambda$ = hiukkasen kokoparametri

$$\sigma = \left[\frac{8}{3}x^4\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2\right]\cdot\pi a^2$$

$$\boxed{\sigma = Q_{sca}\cdot\sigma_{geom}}$$

, missä $\sigma_{geom} = \pi a^2$ = hiukkasen geometrinen poikkipinta-ala

$Q_{sca} = Q(x,n)$ = sironnan vaikutuskerroin (efficiency factor)

Dielektrisille hiukkasille, joille $x \ll 1$, on $Q_{sca} = \frac{8}{3}x^4\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2$

HUOM. G. Mie johti v. 1908 sirontateorian pallomaisille hiukkasille (0.1 < x < 10) lähtien Maxwellin yhtälöistä. Teoria tulostaa sironneen valon intensiteetin sirontakulman, taitekertoimen ja hiukkasen kokoparametrin $x = 2\pi a/\lambda$ funktiona.

Kun $x < 0.1$ $\Rightarrow$ Mien teoria $\longrightarrow$ Rayleighin sironta
Kun $x > 10$ $\Rightarrow$ Mien teoria $\longrightarrow$ geometrinen optiikka (Fresnelin kaavat)

Sirkumstellaariselle ja interstellaariselle pölylle $x \approx 1$.

Kun $x < 0.1$ sirottuu yhtä paljon valoa eteen- ja taaksepäin (Rayleighin sironta). Mien sironnassa sen sijaan valoa sirottuu sitä enemmän eteenpäin, mitä suuremmaksi hiukkasen koko kasvaa.

2.5.4 Kontinuumiabsorptio

a) Kontinuumiabsorption päätekijät

Kun atomi absorboi säteilykvantin, voi elektroni siirtyä energiatilalta toiselle oheisen kuvan mukaisesti. Spektriviivoja aiheuttavien sidoselektronien siirtymiä (bound-bound siirtymiä) käsitellään luvussa 2.5.5. Tässä luvussa tarkastellaan kontinuumiabsorptiota: atomin ionisoitumista (bound-free siirtymät) sekä ytimen kentässä liikkuvan vapaan elektronin fotoniabsorptiota (free-free siirtymät). Kontinuumiabsorptiokertoimen tunteminen on tärkeätä erityisesti atmosfäärimalleja muodostettaessa.

HARJ. TEHT. Osoita, että täysin vapaa elektroni ei voi absorboida fotonia.

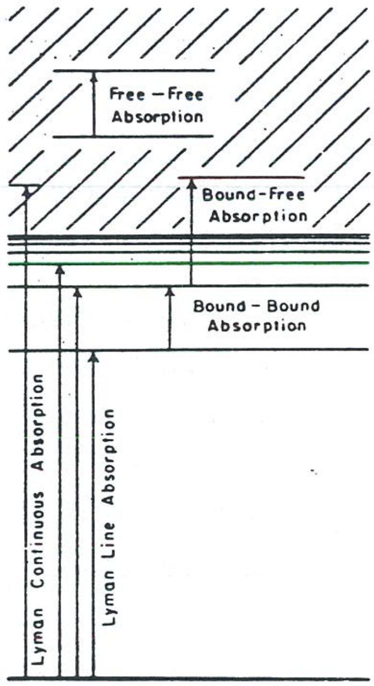
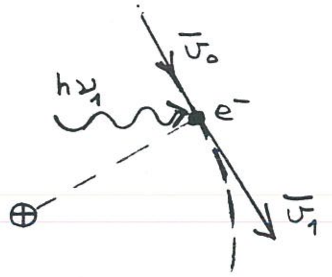


FIG. . BOUND-BOUND, BOUND-FREE, AND FREE-FREE TRANSITIONS IN HYDROGEN

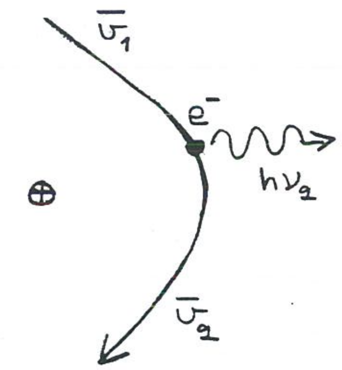
1) Dipolin free-free absorption ja free-free emission periaate

Vapaan elektronin ohittaessa ytimen riittävän läheltä, pystyy elektroni absorboimaan fotonin (kolmen kappaleen probleema), jolloin elektronin nopeus kasvaa:



$$\frac{1}{2} m v_0^2 + h\nu_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$$

Free-free emissiota syntyy, kun esimerkiksi ydin jarruttaa vapaan elektronin liikettä ($\Rightarrow$ elektroni tekee hyperbeliradallaan jyrkemmän kaarteen ytimen ohi). Tällöin tilapäisesti muodostuneen dipolin dipolimomentti muuttuu, jonka seurauksena elektroni lähettää säteilyä:



$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + h\nu_2$$

Vety ionisoituu 10000 K lämpötilassa, joten free-free emissio ja free-free absorptio ovat tärkeitä kuumissa atmosfääreissä.

Koska ytimen kentässä liikkuvan vapaan elektronin absorboima energia ei ole kvantittunut, voi absorboidun fotonin taajuus olla periaatteessa mikä tahansa. Kyseiset taajuudet muodostavat siten jatkuvan spektrin. Todettakoon kuitenkin, että pienienergisten fotonien free-free absorptio on paljon yleisempää kuin suurienergisten fotonien, minkä johdosta free-free absorption taajuudet keskittyvät spektrin infrapuna-alueelle.

2) Atomin ionisoituminen

Mikä tahansa säteilykvantti voi ionisoida atomin, jos sillä on riittävästi energiaa irrottamaan sidoselektroni atomista.

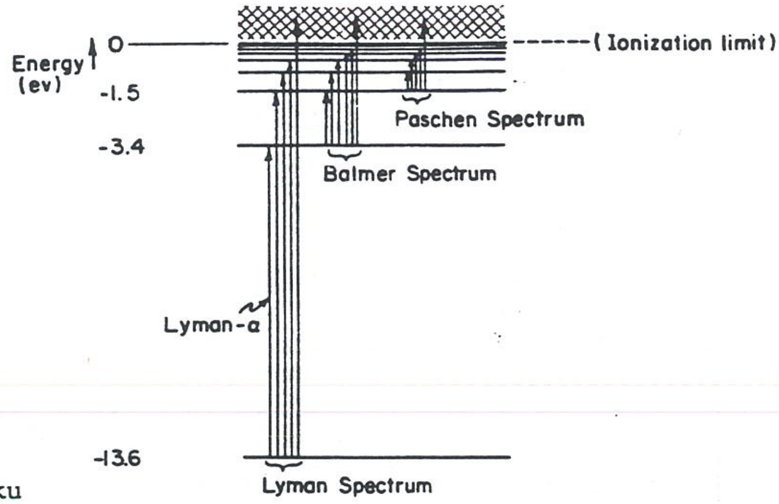


Fig. Energy level diagram of atomic hydrogen.

$$E = -\frac{hR_\nu Z^2}{n^2}$$

$$\Delta E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = hc\bar{\nu}$$

$$= \underbrace{hcR_\infty}_{R_\nu} \cdot Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

missä Z = ytimen järjestysluku

$R_\infty = \frac{2\pi^2 m e^4}{c h^3}$ = Rydbergin vakio $[cm^{-1}]$

$R_\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}$ = Rydbergin vakio [Hz]

Kuvasta nähdään, että energiatasot lähestyvät toisiaan pääkvanttiluvun n kasvaessa. Tietyllä fotonienergialla "viivat sulautuvat yhteen". Esimerkiksi vedyn Lyman sarjan raja on 13.6 eV, mikä vastaa fotonia, jonka λ = 912 Å. Näitä sarjarajoja energeettisempiä siirtymiä kutsutaan elektronin bound-free siirtymiksi. Esimerkiksi vety ionisoituu eri viritystiloissaan, kun

$\lambda < \lambda_{LyC}$ = 912 Å (Lyman sarjan kontinuumiraja); n = 1 $\rightarrow \infty$
$\lambda < \lambda_{BaC}$ = 3647 Å (Balmer sarjan kontinuumiraja); n = 2 $\rightarrow \infty$
$\lambda < \lambda_{PaC}$ = 8206 Å (Paschen sarjan kontinuumiraja); n = 3 $\rightarrow \infty$

Atomin ionisoituessa määräytyy vapautuneen elektronin liike-energia yhtälöstä

$$h\nu = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{elektronin } W_{kin}} + \underbrace{\frac{hR_\nu Z^2}{n^2}}_{\text{sidosenergian voittamiseksi tehty työ}} \qquad (1)$$

Yhtenäisen formalismin vuoksi sovelletaan yhtälöä $h\nu = hR_\nu Z^2(1/n^2 - 1/m^2)$ myös bound-free siirtymiin. Vapaan elektronin "energiatason kvanttilukua" merkitään tällöin symbolilla iK (i = imaginääriyksikkö)

$$\Rightarrow \quad h\nu = hR_\nu Z^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{K^2}\right) \qquad (2)$$

Yhdistämällä yhtälöt (1) ja (2) saadaan

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = \frac{hR_\nu Z^2}{K^2}} \qquad (3)$$

Introdusoimalla kontinuumiin energiataso iK, voidaan vapaan elektronin liike-energia muodollisesti esittää "sidosenergiana".

HUOM. Erotuksena atomin sidottuihin tiloihin nähden voi kontinuumin energiatason "järjestysluku" K olla mikä tahansa positiivinen reaaliluku. Lähestyttäessä kontinuumirajaa kasvaa K kohti ääretöntä. Kontinuumin aaltofunktioihin ei tällä kurssilla paneuduta. Todettakoon vain, että kaukana atomista (K hyvin pieni) aaltofunktio muuttuu tavalliseksi palloaalloksi.

Luvussa 2.5.2.e johdettiin atomaarisen kokonaisabsorption lauseke:

$$\int_0^\infty \alpha_\nu \, d\nu = f\,\frac{\pi e^2}{mc}$$

Tähän nojautuen voidaan atomaarinen bound-free absorptiokerroin α_ν^{bf} johtaa seuraavasti:

$$\alpha_\nu \, d\nu = df\,\frac{\pi e^2}{mc}$$

, missä df = oskillaattorivoimakkuus taajuusyksikköä kohden

Tietyllä välillä $\Delta\nu$ yhteenlaskettu oskillaattorivoimakkuus Δf on jatkuvuuden perusteella oltava sama kontinuumirajan kummallakin puolella:

$$\Delta f = \bar{f}\cdot\Delta n = \bar{f}\cdot\Delta K,$$ missä $\bar{f}$ = keskimääräinen oskillaattorivoimakkuus kapealla kaistalla ΔK (vast. Δn)

$$\Rightarrow df = \bar{f}\,dK$$

$$\Rightarrow \alpha_\nu^{bf} = \bar{f}\,\frac{\pi e^2}{mc}\,\frac{dK}{d\nu}$$

Differentioimalla edellä esitetyt yhtälöt (1) ja (3) saadaan

$$-\frac{2hR_\nu Z^2}{K^3}\,dK = mv\,dv \overset{(1)}{=} h\,d\nu$$

$$\Rightarrow \left|\frac{dK}{d\nu}\right| = \frac{K^3}{2R_\nu Z^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_\nu^{bf} = \bar{f}\,\frac{\pi e^2}{mc}\,\frac{K^3}{2R_\nu Z^2}}$$

ATOMAARINEN BOUND-FREE
ABSORPTIOKERROIN

b) Vedyn bound-free absorptiokerroin

Kvanttimekaniikan avulla voidaan kullekin alkuaineelle ja kullekin siirtymälle $n' \rightarrow n$ laskea oskillaattorivoimakkuus $f_{n'n}$(kts. liitteen II loppuosaa) Kramer käytti laskuissaan (v. 1923) seuraavaa semiklassista kaavaa vedylle:

$$f_K(n',n) = \frac{2^6}{3\pi\sqrt{3}}\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)^{-3}\frac{1}{n^3 n'^3}\,\frac{1}{g_{n'}}$$

, missä $g_{n'}$ = tilan n' statistinen paino

Menzelin ja Pekeriksen kvanttimekaaniset tulokset (M.N., 96, 77, 1935) poikkesivat hieman Kramerin tuloksista (vedyn tapauksessa tosin hyvin vähän). Jos merkitään Kramerin oskillaattorivoimakkuutta f_K:lla, niin kvanttimekaniikan avulla laskettu oskillaattorivoimakkuus on

$$f(n',n) = f_K(n',n)\cdot g(n',n)$$

missä g = Gauntin kerroin, joka ilmoittaa semiklassisen kaavan korjauskertoimen.

Koska Gauntin kerroin eri alkuaineille on taulukoitu (Baker & Menzel, Ap.J., 88, 52, 1938), ilmoitetaan tähtitieteessä $f(n',n)$ Kramerin yksinkertaisella, semiklassisella kaavalla korjattuna Gauntin tekijällä. Etenkin kontinuumiabsorptioissa on Gauntin korjauskertoimen käyttö miellyttävää.

Bound-free siirtymille $n \rightarrow iK$, on äskeisessä oskillaattorivoimakkuuden lausekkeessa tehtävä seuraavat merkintämuutokset: $n' \rightarrow n$ ja $n \rightarrow iK$, jolloin vedyn bound-free oskillaatorivoimakkuudeksi saadaan

$$f_{nK} = \frac{64}{3\pi\sqrt{3}}\,\frac{1}{2n^2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{K^2}\right)^{-3}\left|\frac{1}{n^3}\,\frac{1}{K^3}\right|\cdot g^{bf}$$

, missä g^{bf} = bound-free siirtymän Gauntin kerroin (merkitään usein myös g_{II})

$$\nu = R_\nu Z^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{K^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{K^2}\right)^3 = \frac{\nu^3}{R_\nu^3 Z^6}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{nK} = \frac{32}{3\pi\sqrt{3}} \frac{R_\nu^3 Z^6}{n^5 \nu^3} \left|\frac{1}{K^3}\right| g^{bf}}$$

VEDYN BOUND-FREE SIIRTYMÄN OSKILLAATTORIVOIMAKKUUS

Sijoittamalla tämä a-kohdassa johdettuun kontinuumiabsorptiokertoimen lausekkeeseen saadaan

$$\alpha_\nu^{bf} = \bar{f} \frac{\pi e^2}{mc} \frac{K^3}{2R_\nu Z^2}$$

Sij. $Z = 1$

$$f_{nK} = \frac{32}{3\pi\sqrt{3}} \frac{R_\nu^3}{|K^3|} \frac{g^{bf}}{n^5 \nu^3}$$

$$R_\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}$$

(yksi Rydbergin vakio kirjoitetaan auki)

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_n^{bf}(\nu) = \frac{32}{3\sqrt{3}} \frac{\pi^2 e^6}{c h^3} \frac{R_\nu}{n^5 \nu^3} g^{bf}}$$

VEDYN ATOMAARINEN BOUND-FREE ABSORPTIOKERROIN

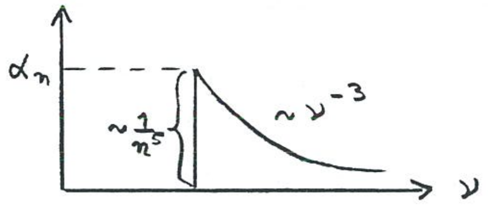
Vedylle Gaunt-kerroin $g^{bf} \approx 1$, joten $\alpha_n^{bf}(\nu) \sim n^{-5} \nu^{-3}$. Sijoittamalla vakiot (cgs-yksiköissä) saadaan

$$\alpha_n^{bf}(\nu) = 2.81 \cdot 10^{29} \frac{g^{bf}}{n^5 \nu^3} \qquad [cm^2]$$

ESIM. Balmerin kontinuumiabsorptiossa n = 2

$\lambda = 3647$ Å , $\nu = 8.22 \cdot 10^{14}$ Hz

$$\Rightarrow \alpha_2^{bf}(\nu) = 1.58 \cdot 10^{-17} g^{bf} \qquad [cm^2]$$



Eri viivasarjojen rajojen välillä kontinuumiabsorptiokerroin alenee kuten ν^{-3}, mutta nousee äkisti seuraavan sarjan rajalla. Visuaalialueella tämä nähdään ns. Balmerin hyppynä aallonpituudella λ = 3467Å.

Vedyn sarjarajojen taajuuksilla ν_n suhtautuu kontinuukiabsorptiokerroin α_n Lymanin kontinuumiabsorptiokertoimeen α_1 kuten

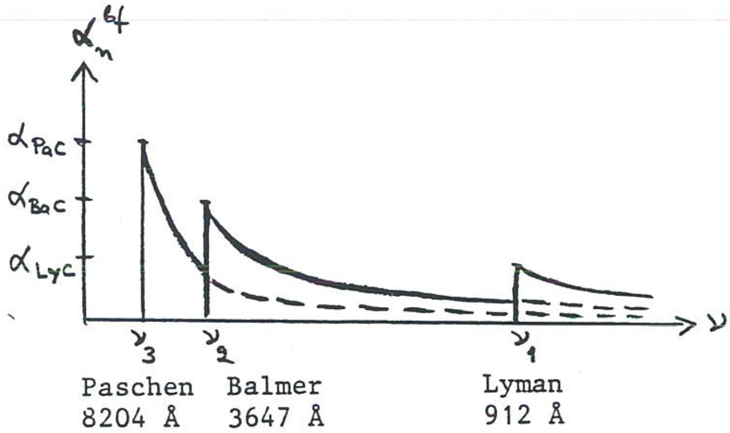
$$\frac{\alpha_n^{bf}(\nu_n)}{\alpha_1^{bf}(\nu_1)} = \frac{\frac{1}{n^5}\frac{1}{\nu_n^3}}{1\cdot\frac{1}{\nu_1^3}} = \frac{(\nu_1/\nu_n)^3}{n^5}$$

$$= \frac{(n^2)^3}{n^5} = n$$

Ionisaatioenergia $E_n = \frac{hR_\nu}{n^2}$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_1}{h\nu_n} = \frac{n^2}{1}$$

$$\Rightarrow \alpha_n^{bf}(\nu_n) = n\cdot\alpha_1^{bf}(\nu_1)$$



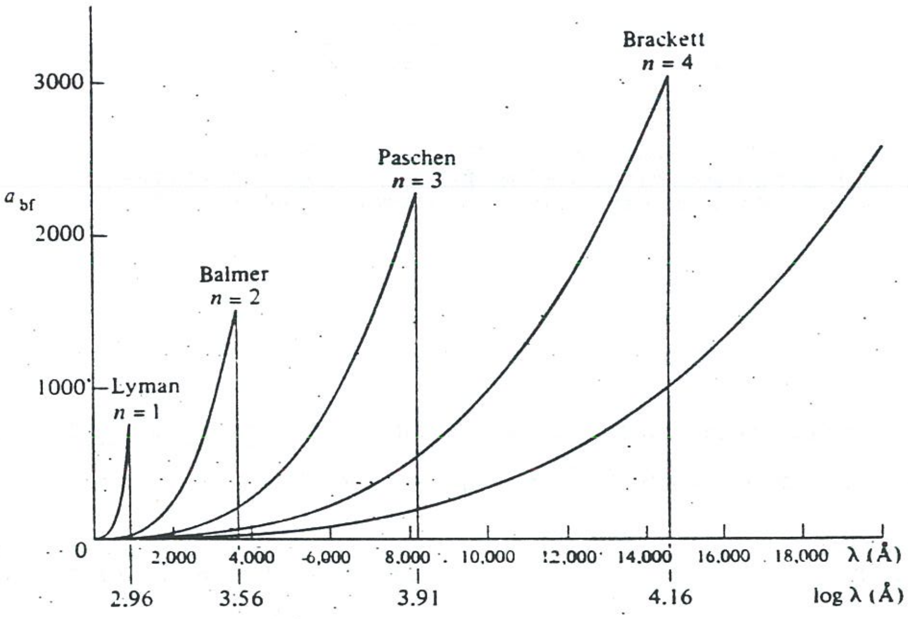


Fig. The Bound-Free Absorption Coefficient of a Hydrogen-Like Atom. The coefficients of absorption from the first four levels, and part of the coefficient from the fifth level, are illustrated. The units are chosen such that $a_{bf} = 1$ at $\lambda = 100$ Å, $n = 1$; thus the ordinate is actually eq. (3-13),

$$a_{bf}(\lambda, z', n)/a_{bf}(\lambda = 100\ \text{Å}, z', n = 1).$$

Kun huomioidaan, että tietyn sarjarajan absorptiokertoimeen on lisättävä alemmilla taajuuksilla esiintyvien sarjarajojen absorptiokertoimien jäännökset ($\alpha_\nu \sim \nu^{-3}$) tarkasteltavan taajuuden kohdalla, saadaan seuraava kuva.

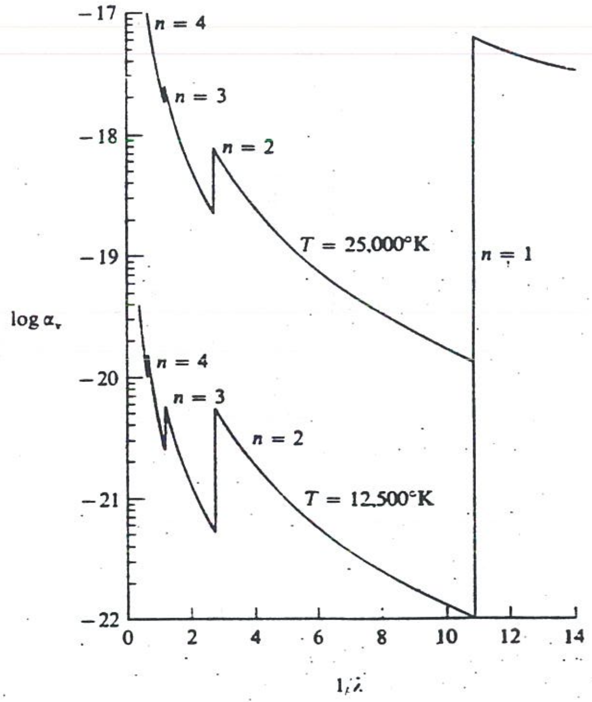


FIG. . Opacity due to hydrogen at $T = 12{,}500$°K and $T = 25{,}000$°K; photoionization edges are labeled with quantum number of state from which they arise. Ordinate gives sum of bound-free and free-free opacity in cm^2/atom; abscissa gives $1/\lambda$, where λ is in microns.

Siirryttäessä atomaarisesta absorptiokertoimesta α_ν^{bf} massa-absorptiokertoimeen k_ν^{bf} [cm^2/g] saadaan kaavan $k_\nu \rho = N_\nu \alpha_\nu$ perusteella

$$k_n^{bf} = \frac{\Sigma N_n \alpha_n^{bf}}{\rho}$$

, missä N_n = viritystilassa n olevien vetyatomien $1km/cm^3$

Summaus vain yli niitten n:n arvojen, joille $\nu > \nu_n$ = kontinuumiraja

Esim. 912 Å < λ < 3647 Å : $\sum_{n \geq 2}$

3647 Å < λ < 8200 Å : $\sum_{n \geq 3}$

Perustilassa n = 1 olevien vetyatomien kontinuumiabsorptiokerroin/1g on siten

$$k_1^{bf} = \frac{\sum N_n \alpha_n^{bf}}{N_1 \cdot m_H}$$

, missä N_1 = perustilassa olevien vetyatomien lkm/cm^3

m_H = vetyatomin massa [g]

$$k_1^{bf} = \frac{1}{m_H} \sum \frac{N_n}{N_1} \alpha_n^{bf}$$

Boltzmannin yhtälö ilmoittaa eri energiatasoilla olevien atomien suhteelliset määrät:

$$\frac{N_n}{N_1} = \frac{g_n}{g_1} e^{-(\chi_1 - \chi_n)}$$

, missä $\chi_n = \frac{h\nu_n}{kT_e}$

$$\frac{N_n}{N_1} = \frac{2n^2}{2} e^{-\chi_1} \cdot e^{\chi_n}$$

$$\Rightarrow k_1^{bf} = \frac{e^{-\chi_1}}{m_H} \sum n^2 e^{\chi_n} \alpha_n^{bf}$$

Sij. $\alpha_n^{bf} = \frac{32}{3\sqrt{3}} \frac{\pi^2 e^6}{c h^3} \frac{R_\nu g^{bf}}{n^5 \nu^3}$

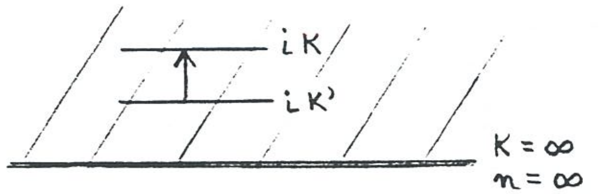
$$\Rightarrow \boxed{k_1^{bf} = \frac{32}{3\sqrt{3}} \frac{\pi^2 e^6 R_\nu}{c h^3 m_H} \frac{e^{-\chi_1}}{\nu^3} \sum_{\substack{n \\ (\nu > \nu_n)}} \frac{g^{bf}}{n^3} e^{\chi_n}}$$

PERUSTILASSA OLEVIEN VETYATOMIEN BOUND-FREE MASSA-ABSORPTIOKERROIN

c) Vedyn free-free absorptiokerroin

Hyvin kuumissa tähdissä ulottuu free-free absorptio myös spektrin visuaalialueelle. Tällöin on bound-free massa-absorptiokertoimeen lisättävä free-free kontinuumiabsorption osuus.

Free-free absorptiokerroin yhtä protonia ja sitä ohittavaa (nopeus välissä [v, v + dv]) vapaata elektronia kohden saadaan a-kohdassa johdetun atomaarisen kontinuumiabsorptiokertoimen α_ν^{bf} avulla, kunhan sidottu energiatila n korvataan vapaan tilan energiatasolla iK' ja bound-free oskillaattorivoimakkuus korvataan free-free siirtymän oskillaattorivoimakkuudella $f_{K'K}$:



kontinuumiraja

$$f_{K'K} = \frac{64}{3\sqrt{3}\pi}\frac{1}{g_{K'}}\frac{1}{\left[-\frac{1}{K'^2}+\frac{1}{K^2}\right]^3}\left|\frac{1}{K'^3}\frac{1}{K^3}\right| g^{ff}$$

$$= \frac{64}{3\sqrt{3}\pi}\frac{1}{g_{K'}}\frac{R_\nu^3 Z^6}{\nu^3}\left|\frac{1}{K'^3}\frac{1}{K^3}\right| g^{ff}$$

$$\nu^{ff} = R_\nu Z^2\left(\frac{1}{K^2}-\frac{1}{K'^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{K^2}-\frac{1}{K'^2}\right)^3 = \left(\frac{\nu}{R_\nu Z^2}\right)^3$$

Vapaan elektronin statistinen paino $g_{K'}$ saadaan seuraavasti:

Faasiavaruuden "alkeiskoppi" $= dp_x dp_y dp_z dxdydz$

$$= \underbrace{dp_x dx}_{h}\underbrace{dp_y dy}_{h}\underbrace{dp_z dz}_{h} \approx h^3$$

Heisenbergin epätarkkuusperiaate: $dp_x dx \approx h$

Elektronien maksimilukumäärä yksikkötilavuudessa ($dxdydz = 1$) = 2×faasiavaruuden alkeiskoppien lkm.

jokaiseen alkeiskoppiin mahtuu kaksi elektronia, joilla vastakkaiset spinit

$$g_{K'} = 2\cdot\frac{4\pi p^2 dp}{h^3}$$

$$= \frac{8\pi}{h^3}p^2 dp$$

$$= \frac{8\pi}{h^3}(m v')^2 m dv'$$

Elektronin liike-energia voidaan lausua kontinuumin "sidosenergiana" (kts. a-kohta)

$$\frac{1}{2}m v'^2 = \frac{hR_\nu Z^2}{K'^2} \quad \text{differentioidaan}$$

$$\Rightarrow |dv'| = \frac{2hR_\nu Z^2}{m v' K'^2}|dK'|$$

$$g_{K'} = \frac{16\pi m^2 R_\nu Z^2 v'}{h^2 K'^3}dK'$$

Valitsemalla $dK' = 1$ ja sijoittamalla vapaan elektronin statistinen paino $g_{K'}$ oskillaattorivoimakkuuden lausekkeeseen $f_{K'K}$ saadaan

$$\alpha_\nu = f_{K'K}\frac{\pi e^2}{mc}\frac{K^3}{2R_\nu Z^2} \qquad f_{K'K} = \frac{4}{3\pi^2\sqrt{3}}\frac{h^2 R_\nu^2 Z^4}{m^2 v'\nu^3}\frac{g^{ff}}{|K^3|}$$

$$\alpha_\nu = \frac{2}{3\pi\sqrt{3}}\frac{h^2 e^2 R_\nu Z^2}{m^3 c v'}\frac{g^{ff}}{\nu^3}$$

Kontinuumiabsorptiokerroin yhtä protonia ja yhtä vapaata elektronia (nopeus välissä $[v, v+dv]$) kohden on

$$\boxed{\alpha_K^{ff}(\nu)dv = \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{R_\nu Z^2 h^2 e^2}{m^3\pi c v}\frac{g^{ff}}{\nu^3}dv}$$

VEDYN FREE-FREE ABSORPTIOKERROIN

missä g^{ff} = free-free siirtymän Gaunt-kerroin (≈ 1)
(merkitään usein myös g_{III})

Relaation $k_\nu \varrho = N\alpha_\nu$ perusteella voidaan free-free absorptiokerroin α_K^{ff} (yhtä protonia ja yhtä vapaata elektronia kohden) muuttaa massa-absorptiokertoimeksi k_ν^{ff}:

$$\varrho\, dk_\nu^{ff} = N_i \left[N_e f(v)\, dv \right] \cdot \alpha_K^{ff}(\nu)$$

, missä N_i = protonien lkm/cm^3

$N_e f(v)dv$ = elektronien lkm/cm^3, joilla nopeus välissä $[v, v + dv]$

Oletetaan Maxwellin nopeusjakautuma, jolloin

$$f(v)\,dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

Merkitään $\chi_K = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{kT_e} = \frac{h\nu_K}{kT_e}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 = \chi_K kT_e \quad \Big| \text{ differentioidaa}$$

$$\Rightarrow v\,dv = \frac{kT_e}{m} d\chi_K$$

$$f(v)\,dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v \frac{kT_e}{m} e^{-\chi_K} d\chi_K$$

Tulo $N_i N_e$ saadaan yhdistetyn Boltzmannin ja Sahan yhtälön avulla:

$$N_n = \frac{N_i N_e}{T_e^{3/2}} \left(\frac{h^2}{2\pi mk} \right)^{3/2} n^2 e^{\chi_n}$$

Perustilassa:

$$N_1 = \frac{N_i N_e}{T_e^{3/2}} \left(\frac{h^2}{2\pi mk} \right)^{3/2} e^{\chi_1}$$

$$\Rightarrow N_i N_e = N_1 \left(\frac{2\pi mkT_e}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_1}$$

missä $\chi_1 = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{kT_e} = \frac{1}{kT_e} \frac{hR_\nu Z^2}{K^2} \overset{(K=1)}{=} \frac{hR_\nu Z^2}{kT_e}$

Huomioimalla, että perustilassa olevien vetyatomien tiheys $\varrho = N_1 m_H$ sekä sijoittamalla massa-absorptiokertoimen dk_ν^{ff} lausekkeeseen ϱ, $N_i N_e$, $f(v)dv$, α_K^{ff} sekä vedyn järjestysluku Z = 1 saadaan

$$dk_\nu^{ff} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{e^2 R_\nu k T_e}{c\, h\, m\, m_H} \frac{g^{ff}}{\nu^3} e^{-(\chi_1 + \chi_2)} d\chi_K$$

Koska elektroni voi säteillä taajuudella ν riippumatta siitä, mikä sen nopeus on, on dk_ν^{ff} integroitava yli kaikkien nopeusarvojen:

$$k_\nu^{ff} = \int_{v=0}^{\infty} dk_\nu^{ff} = \int_{\chi_k=0}^{\infty} dk_\nu^{ff}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_\nu^{ff} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{e^2 R_\nu k}{ch\, m \cdot m_H} \frac{T_e g^{ff}}{\nu^3} e^{-\chi_1}}$$

VEDYN FREE-FREE MASSA-ABSORPTIOKERROIN

Yhdistämällä vetyatomien bound-free sekä free-free absorptiokerroin saadaan kokonaisabsorptiokerroin yhtä vetygrammaa kohden:

$$\boxed{k_\nu = k_\nu^{bf} + k_\nu^{ff}}$$

KOKONAISABSORPTIOKERROIN/1g

Vedyn kokonaisabsorptiokerroin taajuuden funktiona on esitetty seuraavassa kuvassa.

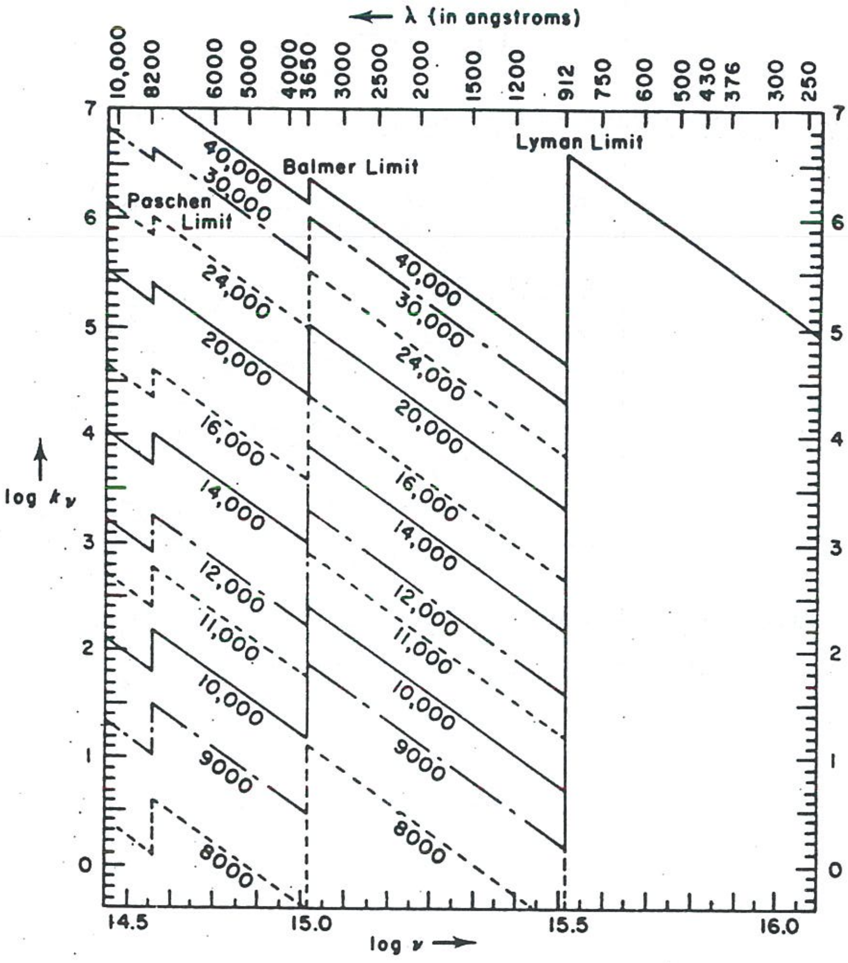


Fig. . THE ABSORPTION COEFFICIENT OF ATOMIC HYDROGEN
The logarithm of the absorption coefficient of atomic hydrogen (not corrected for negative absorptions), calculated per gram of H atoms in the ground level, is plotted against log ν for various temperatures. The wavelength scale is indicated at the top. Notice in particular how the size of the Balmer discontinuity increases monotonically with decreasing temperature. Were atomic hydrogen the sole source of opacity in stellar atmospheres, the jump in the energy distribution at the limit of the Balmer series could become very large.

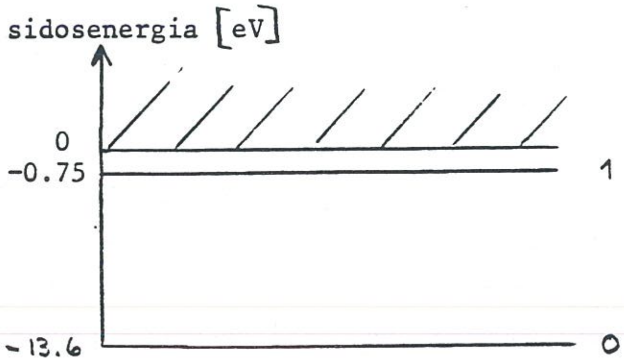
Nähdään, että kontinuumiabsorptiokerroin riippuu voimakkaasti lämpötilasta. Alhaisissa lämpötiloissa lähes kaikki vetyatomit ovat perustilassa. Käytännöllisesti katsoen kontinuumiabsorptiot tapahtuvat tällöin alueella $\lambda < 912$ Å. Tästä syystä neutraalit vetyatomit eivät juuri vaikuta visuaalialueen opasiteettiin. Lämpötilan noustessa kasvaa korkeampien energiatilojen miehitys, jolloin myös visuaaliaallonpituuksilla kontinuumiabsorptio kasvaa. Vasta Aurinkoa vähän kuumemmissa tähdissä vedyn bound-free absorptio tulee tärkeäksi, ja vain kaikkein kuumimmissa tähdissä täytyy huomioida free-free absorptio.

Kuvasta nähdään myös, että Balmerin hypyn suuruus kasvaa lämpötilan aletessa.

d) Negatiivisen vetyionin kontinuumiabsorptio

Vedyn bound-free ja free-free absorptio antaa visuaalialueella riittävän kontinuumiabsorptiolähteen vain kuumilla tähdille ($T \gtrsim 8000$ K). Kylmempien tähtien opasiteetin selittäminen metallien avulla ei luonnistu, koska tällöin myös metallien absorptioviivojen täytyisi olla havaittuja paljon voimakkaammat. R. Wildt esitti v. 1938, että negatiivisen vetyionin (H^-) bound-free ja free-free siirtymät aiheuttavat riittävästi kontinuumiabsorptiota visuaalialueella, kun lämpötila tähden atmosfäärissä on $T \lesssim 7000$ K. (Bethe ja Hylleraas olivat jo v. 1930 kvanttimekaanisilla laskuilla ennustaneet H^- ionin olemassaolon.)

Koska vedyn yksi elektroni ei täysin peitä ytimen varausta, pystyy ydin sieppaamaan läheltä kulkevan elektronin elektroniverhoonsa. H^- ionissa on ensimmäisen elektronin perustilan sidosenergia 13.6 eV ja tämän toisen, siepatun elektronin sidosenergia on 0.754 eV. Alhaisen sidosenergian johdosta H^- ioni ei esiinny kuumien tähtien atmosfääreissä.



Koska H^--ionilla on vain yksi mahdollinen sidottu tila, ei H^- pysty bound-bound siirtymiin ($\Rightarrow$ spektriviiva), vaan ainoastaan kontinuumiabsorptioihin. H^--ionin kontinuumiabsorptiokertoimen laskeminen on mutkikkaampi kuin neutraalin vedyn tapauksessa. Seuraava kuva esittää laskujen tulokset

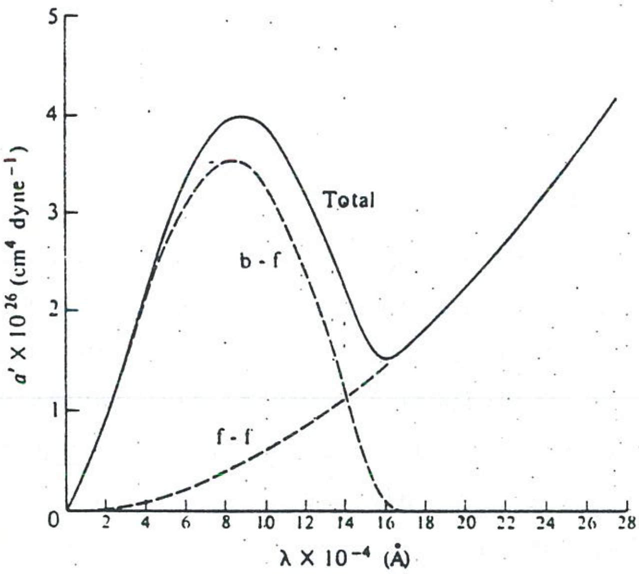
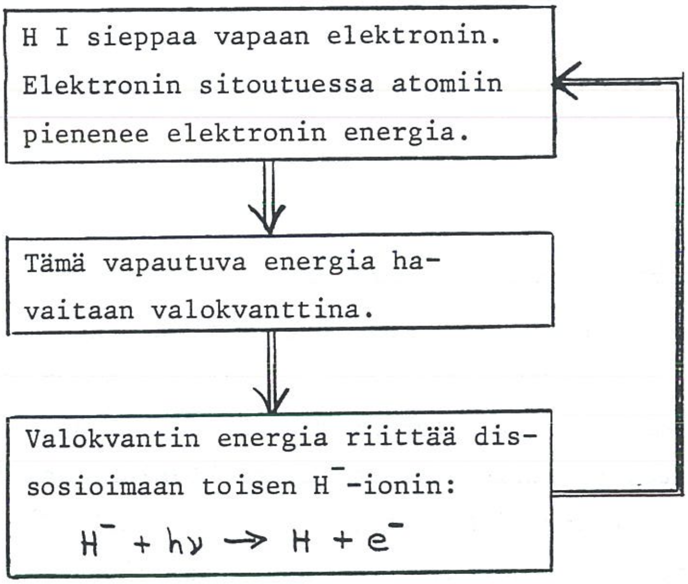


Fig. The Absorption Coefficient of the Negative Hydrogen Ion at a Temperature of 6300°K (θ = 0.8) due to Bound-Free and Free-Free Transitions. The quantity plotted is 10^{26} times the absorption coefficient per unit electron pressure and per neutral hydrogen atom in one cm^3. Thus the coefficient has the dimensions cm^{-1} and is not a mass absorption coefficient. [Adapted from N. A. Doughty and P. A. Fraser, 1966 (211).]

Nähdään, että kontinuumiabsorptio koostuu kahdesta tekijästä: bound-free sekä free-free siirtymistä. Lisäksi havaitaan, että (päinvastoin kuin neutraalin vedyn tapauksessa) bound-free absorptio ei ole maksimissaan heti sarjarajan vieressä, vaan se kasvaa rajalta (0.754 eV vastaa raja-aallonpituutta λ = 16450 Å) lyhyempiin aallonpituuksiin päin ja saavuttaa maksimin kun $\lambda \approx$ 8500 Å.

H^--ionin matalasta dissosiaatioenergiasta johtuen ovat negatiivisen vetyionin bound-free ja free-free siirtymät tärkeitä visuaalisessa ja infrapuna-alueessa. H^--ionin merkitys ilmenee seuraavasta kaaviokuvasta:



Tämän kiertokulun ansiosta sitoutuu elektroneja jatkuvasti vetyatomeihin tuottaen siten jatkuvasti uusia valokvantteja. Auringon näkyvä valo esimerkiksi on seurausta H^--ionin muodostumisesta. (Huom. Auringon fotosfäärikerroksen paksuus on vain noin 300 km)

Sahan yhtälön avulla voidaan laskea H^--ionin muodostavien vetyatomien suhteellinen määrä tietyssä lämpötilassa ja paineessa.

$$\frac{N_{0,1}(H)\cdot P_e}{N(H^-)} = 0.331\cdot T^{5/2}\,\frac{2u(H)}{u(H^-)}\cdot 10^{-\frac{5040}{T}\cdot \chi\,[eV]}$$

$$\Rightarrow \frac{N(H^-)}{N_{0,1}(H)} = 1.2\times 10^{-8}$$

$T = 6000$ K
$P_e = 10\ dyn/cm^2$
$u(H) = 1$
$u(H^-) = 1$
$\chi = 0.75$ eV

Koska Paschen kontinuumiabsorptioitten ($n = 3 \rightarrow \infty$) alue on 3647 Å < λ < 8204 Å, lasketaan viritystilassa n = 3 olevien vetyatomien suhteellinen osuus perustilassa oleviin vetyatomeihin nähden:

$$\Rightarrow \frac{N_{0,3}}{N_{0,1}} = 6.28\times 10^{-10}$$

Yhdistämällä nämä molemmat tulokset saadaan

$$\frac{N(H^-)}{N_{0,1}(H)} : \frac{N_{0,3}(H)}{N_{0,1}(H)} = \frac{N(H^-)}{N_{0,3}(H)} = \frac{1.2 \times 10^{-8}}{6.28 \times 10^{-10}} \approx 20$$

Voidaan todeta, että kontinuumiabsorption kannalta H^- ioni on tärkeämpi kuin neutraali vety.

e) Muiden alkuaineiden kontinuumiabsorptio

Tietyillä spektrialueilla myös muut alkuaineet voivat aiheuttaa merkittävää kontinuumiabsorptiota. Kuumissa tähdissä (T > 16800 K) on erityisesti helium huomioitava. Kylmien tähtien atmosfääreissä taas eräät metallit (Al, Mg, Si, C ...) aiheuttavat kontinuumiabsorptiota UV-alueella. Todettakoon, että monien metallien kontinuumiabsorptioraja osuu alueelle λ_{cont} < 912 Å, jossa vedyn Lyman-kontinuumiabsorptio dominoi. Seuraavissa kuvissa on esitetty kontinuumiabsorptio aallonpituuden funktiona.

a) Auringon atmosfäärissä (spektriluokka G2V; T = 5700 K)

b) τ Scorpiin atmosfäärissä (spektriluokka B0V; T = 28300 K)

Kuvista nähdään mikä alkuaine dominoi kullakin taajuusalueella.

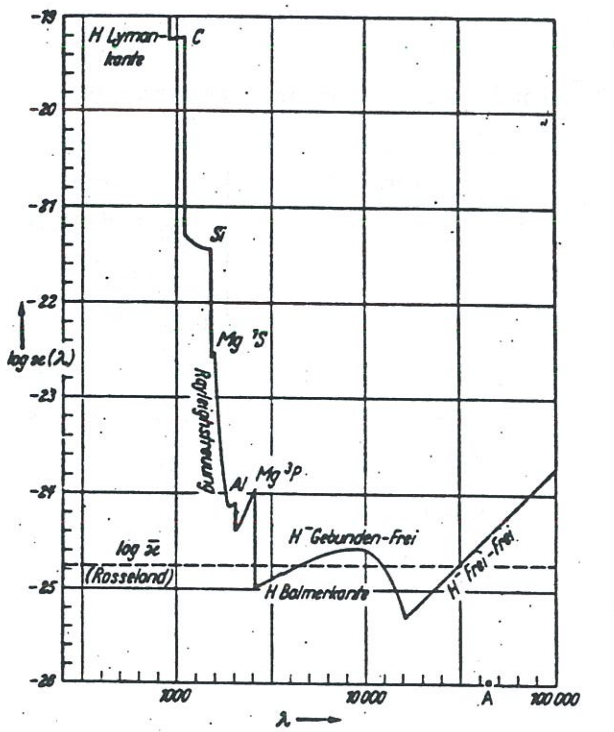
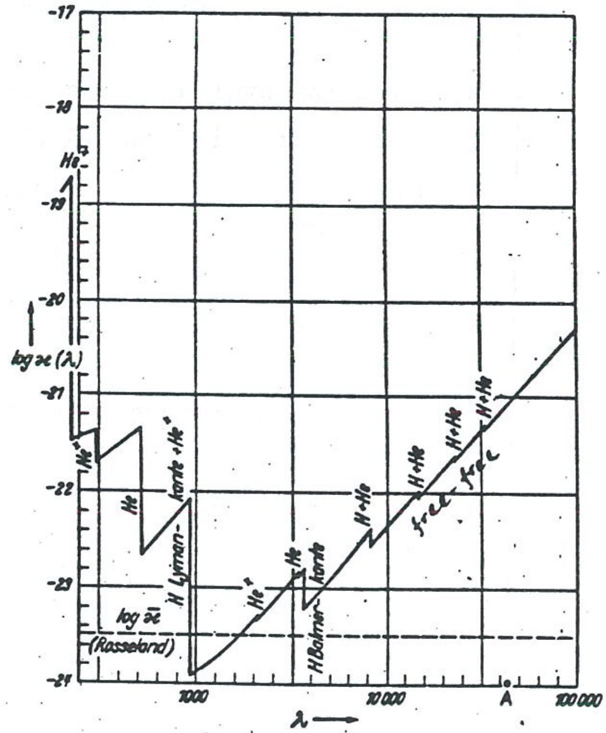


Abb. . Kontinuierlicher Absorptionskoeffizient $\varkappa(\lambda)$ in der Atmosphäre der Sonne (G2V) bei $\tau_0 = 0.1$ (τ_0 entspricht λ 5000 Å), d. h. $T = 5040$°K bzw. $\Theta = 1$ und $P_e = 3.2$ dyn · cm^{-2} bzw. $P_g = 5.8 \cdot 10^4$ dyn · cm^{-2}



. Kontinuierlicher Absorptionskoeffizient $\varkappa(\lambda)$ in der mosphäre des τ Scorpii (B0V) bei $\tau \approx 0.1$, d. h. $T = 28300$ K w. $\Theta = 0.18$ und $P_e = 3.2 \cdot 10^3$ dyn · cm^{-2} bzw. $P_g = 6.4 \cdot 10^3$ dyn · cm^{-2}

Tähtien spektriluokkien mukaisessa järjestyksessä on alla vielä esitetty, mitkä atomit ja ionit vaikuttavat pääasiallisesti kontinuumiabsorptiokertoimeen visuaalialueella.

T_{eff} [K]	spektriluokka		
100800		He II otettava huomioon	
	O		
			Elektronisironta vallitsevin alhaisilla elektronipaineilla
50400			
	B		He I otettava huomioon
16800		H I tärkeä	
10080			
	A	H^- dominoi suurilla elektronipaineen arvoilla	
8400			
		H I tärkeä, mutta H^- vallitseva suurilla elektronipaineilla ja elektronisironta otettava huomioon alhaisilla elektronipaineilla	
7200	F		
6300			
	G		
5600			
		H^- pääasiallisin opasiteettilähde (mm. Auringossa)	
5040	K		
4200			
3880			
	M	Molekyylien absorptio otettava huomioon	

f.) Keskimääräinen absorptiokerroin

Säteilynkuljetusyhtälö pystytään tarkasti ratkaisemaan ns. harmaan atmosfäärin tapauksessa, jossa absorptiokerroin ei riipu taajuudesta. Säteilynkuljetukseen liittyvät yhtälöt harmaassa ja ei-harmaassa (taajuusriippuvaisessa) atmosfäärissä ovat seuraavat:

$$\text{(1a)}\quad \frac{-\cos\theta}{\varrho k_\nu}\frac{dI_\nu}{dX} = I_\nu - S_\nu \qquad\qquad \frac{-\cos\theta}{\varrho k}\frac{dI}{dX} = I - \mathcal{J} \quad\text{(1b)}$$

$$\text{(2a)}\quad -\frac{1}{\varrho k_\nu}\frac{dH_\nu}{dX} = \mathcal{J}_\nu - S_\nu \qquad\qquad -\frac{1}{\varrho k}\frac{dH}{dX} = 0 \quad\text{(2b)}$$

$$\text{(3a)}\quad -\frac{1}{\varrho k_\nu}\frac{dK_\nu}{dX} = H_\nu \qquad\qquad -\frac{1}{\varrho k}\frac{dK}{dX} = H \quad\text{(3b)}$$

missä $H_\nu = \frac{1}{4\pi}\int I_\nu \cos\theta \, d\omega = \frac{1}{4\pi}\mathcal{F}_\nu$

$$K_\nu = \frac{1}{4\pi}\int I_\nu \cos^2\theta \, d\omega = \frac{c}{4\pi} P_{rad}$$

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu \;, \quad \mathcal{J} = \int_0^\infty \mathcal{J}_\nu d\nu \;, \quad H = \int_0^\infty H_\nu d\nu \;, \quad K = \int_0^\infty K_\nu d\nu$$

Seuraavassa tarkastellaan mahdollisuutta löytää keskimääräinen absorptiokerroin (opasiteettikerroin) siten, että integroitaessa monokromaattinen yhtälö yli kaikkien taajuuksien saadaan harmaan atmosfäärin vastaava yhtälö.

1) Chandrasekharin keskimääräinen absorptiokerroin $\bar{k}_F$

Määritellään keskimääräinen absorptiokerroin $\bar{k}$ siten, että kokonaisvuo on sama harmaassa ja ei-harmaassa tapauksessa:

$$\int_0^\infty k_\nu \mathcal{F}_\nu d\nu = \bar{k}\int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu = \bar{k}\,\mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{k}_F = \frac{\int_0^\infty k_\nu \mathcal{F}_\nu d\nu}{\mathcal{F}}}$$

CHANDRASEKHARIN KESKIMÄÄRÄINEN ABSORPTIOKERROIN

Käyttämällä tätä keskimääräistä absorptiokerrointa saadaan vastaavuus yhtälöiden (3a) ja (3b) välille ($H_\nu = \frac{1}{4\pi}\mathcal{F}_\nu$). Sen sijaan $\bar{k}_F$:n käyttö ei anna vastaavuutta yhtälöiden (2a) ja (2b) välille.

Luvussa 2.1.3.c saatiin säteilypaineen gradientin lausekkeeksi :

$$\frac{dP_R}{dx} = \frac{\rho}{c}\int_0^\infty k_\nu \mathcal{F}_\nu\, d\nu \qquad \Big|\, : \rho \bar{k}_F$$

$$\frac{dP_R}{d\bar{\tau}} = \frac{1}{c}\,\frac{\int_0^\infty k_\nu \mathcal{F}_\nu d\nu}{\frac{1}{\mathcal{F}}\int k_\nu \mathcal{F}_\nu d\nu} = \frac{\mathcal{F}}{c} = \frac{\sigma T_{eff}^4}{c}$$

Käyttämällä Chandrasekharin keskimääräistä absorptiokerrointa $\bar{k}_F$ saadaan oikea säteilypaineen gradientti (tärkeä laskettaessa varhaiseen spektriluokkaan kuuluvan tähden malliatmosfääriä).

2) Rosselandin keskimääräinen absorptiokerroin $\bar{k}_R$

Äsken tarkasteltiin yhtälöiden (3a) ja (3b) oikeanpuoleisia lausekkeita. Kun tarkastellaan näiden yhtälöiden vasemmanpuoleisia lausekkeita, saadaan ne vastaamaan toisiaan määrittelemällä keskimääräinen absorptiokerroin siten, että

$$-\frac{1}{\rho}\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu}\frac{dK_\nu}{dx} = \int_0^\infty H_\nu\, d\nu = H = -\frac{1}{\rho\bar{k}}\frac{dK}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\bar{k}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu}\frac{dK_\nu}{dx} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dK_\nu}{dx} d\nu}$$

Tämä $\bar{k}$ on yhtäpitävä Chandrasekharin absorptiokertoimen $\bar{k}_F$ kanssa. Koska funktiota K_ν ei tunneta, oletetaan isotrooppinen säteilykenttä, jolloin $K_\nu = 1/3\ J_\nu$ (kts. luku 2.2.6.b).

$$\Rightarrow \frac{1}{\bar{k}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu}\frac{dJ_\nu}{dx} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dJ_\nu}{dx} d\nu} = \frac{\int \frac{1}{k_\nu}\frac{\partial J_\nu}{\partial T}\frac{dT}{dx} d\nu}{\int \frac{\partial J_\nu}{\partial T}\frac{dT}{dx} d\nu} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu}\frac{\partial J_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial J_\nu}{\partial T} d\nu}$$

Koska edelleen J_ν on tuntematon, on tehtävä lisäapproksimaatio: atmosfäärin syvemmissä kerroksissa pätee LTE oletus, jolloin keskimääräinen intensiteetti voidaan korvata Planckin funktiolla: $J_\nu \rightarrow B_\nu$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\bar{k}} = \frac{1}{\bar{k}_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu}\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}}$$

ROSSELANDIN KESKIMÄÄRÄINEN ABSORPTIOKERROIN

$$\frac{1}{\bar{k}_R} = \frac{\int \frac{1}{k_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\frac{dB}{dT}}$$

$$\mathcal{F}_{out} = \pi\int_0^\infty B_\nu d\nu = \sigma T^4$$

$$\Rightarrow \frac{dB}{dT} = \frac{4}{\pi}\sigma T^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\bar{k}_R} = \frac{\pi}{4\sigma T^3}\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu}\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}$$

HUOM.1 Rosselandin käyttämää approksimaatiota kutsutaan myös diffuusioapproksimaatioksi: kun τ suuri, niin $I_\nu \to B_\nu$ (ts. LTE voimassa). Koska terminen emissio ja sironta tapahtuvat isotrooppisesti, niin säteilykenttä tulee sitä isotrooppisemmaksi mitä suuremmaksi τ kasvaa. Näillä oletuksilla saadaan tulokseksi, että $\mathcal{F}$ on verrannollinen intensiteetin gradienttiin (kts. luku 2.2.6.b)

$$H_\nu = \frac{1}{3}\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\varrho k_\nu}\frac{dB_\nu}{dx}$$

$$H_\nu = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k_\nu \varrho}\frac{dB_\nu}{dx}\right)\frac{dT}{dx}$$

Integroimalla yli taajuuksien saadaan

$$H = -\frac{1}{3\varrho\bar{k}}\frac{dB}{dT}\frac{dT}{dx}$$

Tämä tulos on tarkka, vain mikäli $\bar{k} = \bar{k}_R$.

HUOM.2 $\bar{k}_R$ takaa, että saadaan vastaavuus yhtälöiden (3a) ja (3b) välille, mutta ei yhtälöiden (2a) ja (2b) välille.

3) Planckin keskimääräinen absorptiokerroin $\bar{k}_P$

Planckin keskimääräinen absorptiokerroin $\bar{k}_P$ määritellään siten, että terminen kokonaisemissio on sama harmaassa ja ei-harmaassa atmosfäärissä:

$$\int_0^\infty k_\nu B_\nu d\nu = \bar{k}\int_0^\infty B_\nu d\nu = \bar{k} B$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{k}_P = \frac{\int_0^\infty k_\nu B_\nu(T) d\nu}{B(T)} = \frac{\pi}{\sigma T^4}\int_0^\infty k_\nu B_\nu d\nu}$$

PLANCKIN KESKIMÄÄRÄINEN ABSORPTIOKERROIN

Mikäli halutaan saada vastaavuus yhtälöiden (2a) ja (2b) välille, on

ei-harmaassa atmosfäärissä $\quad -\dfrac{\int_0^\infty dH_\nu d\nu}{dx} = \varrho\int_0^\infty k_\nu (J_\nu - S_\nu) d\nu$

harmaassa atmosfäärissä $\quad -\dfrac{dH}{dx} = 0 = \varrho\bar{k}\,\underbrace{(J - S)}_{=0 \text{ säteilytasapainossa}} = \varrho\int_0^\infty \bar{k}(J_\nu - S_\nu) d\nu$

Vastaavuus saadaan siis relaatiolla

$$\int_0^\infty (k_\nu - \bar{k})(J_\nu - S_\nu)\, d\nu$$

sekä säteilytasapainon oletuksella.

Jos lisäksi oletetaan LTE, niin $S_\nu \rightarrow B_\nu$, jolloin $\bar{k} \rightarrow \bar{k}_P$. Tähden pintakerroksissa vallitsee säteilytasapaino, minkä johdosta opasiteettikerrointa $\bar{k}_P$ on käytetty tarkasteltaessa tähden ulompia atmosfäärikerroksia.

HUOM. Vaikka LTE-oletus tähden pintakerroksissa ei vastaisikaan todellisuutta, on huomioitava, että ennen suurten tietokoneitten aikakautta absorptiokertoimien $\bar{k}_P$ ja $\bar{k}_R$ käyttö oli ainoa tapa saada edes jonkinlainen arvio atmosfääreissä vallitsevista fysikaalisista olosuhteista.

Nähdään, että mikään näistä keskimääräisistä absorptiokertoimista ei anna täydellistä vastaavuutta harmaan ja ei-harmaan, todellisen atmosfäärin välille. Valitsemalla keskimääräinen absorptiokerroin sopivasti voidaan kuitenkin tietyissä rajoissa palauttaa ei-harmaa säteilynkuljetusprobleema harmaaseen tapaukseen. Näin saadaan ainakin ensimmäiset approksimaatiot atmosfäärimallien iterointiproseduureihin.

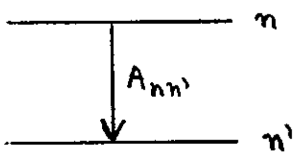
2.5.5 Sidoselektronien siirtymätodennäköisyydet

Klassinen säteilyteoria käsittelee värähtelevän dipolin lähettämää jatkuvaa emissiota. Kvanttiteoriassa taas säteily syntyy kvantteina elektronin siirtyessä atomin energiatilalta toiselle: $h\nu = E_n - E_{n'}$. Kvanttimekaniikan avulla voidaan kullekin siirtymälle laskea elektronin siirtymätodennäköisyys. Näitä siirtymätodennäköisyyksiä merkitään seuraavasti: $A_{nn'}$ (spontaani emissio), $B_{nn'}$ (indusoitu emissio) ja $B_{n'n}$ (absorptio). Pieni johdatus siirtymätodennäköisyyksien kvanttimekaanisiin laskuihin on esitetty liitteessä II.

a) Elektronisiirtymien Einsteinin todennäköisyyskertoimet

1) Spontaani emissio

Todennäköisyys, että energiatilassa n oleva atomi siirtyy ajassa dt alempaan tilaan n' on



$$\frac{N(n \rightarrow n')}{N_n} = A_{nn'}\, dt$$

$$\boxed{N(n \rightarrow n') = N_n \cdot A_{nn'}\, dt}$$ = siirtymien lukumäärä/cm^3 ajassa dt

missä N_n = tilassa n olevien atomien lukumäärä/cm^3

$A_{nn'}$ = spontaanin emission todennäköisyyskerroin

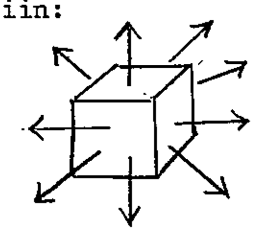
yleensä $A_{nn'} = 10^8 - 10^9$ 1/s

ESIM. Oletetaan, että $N_n = 10^8$ atomia/cm^3

ja $A_{nn'} = 10^6$ 1/s

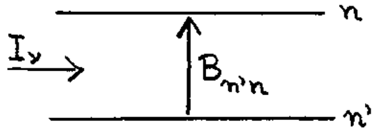
Tällöin $N(n \rightarrow n') = 10^{14}$ siirtymää/$cm^3 \cdot s$

HUOM. Spontaani siirtymä ei riipu mahdollisesti läsnä olevasta säteilykentästä. Spontaanin emission säteilyä vapautuu isotrooppisesti kaikkiin suuntiin:



2) Absorptio

$$\frac{N(n' \to n)}{N_{n'}} = B_{n'n}\, I_\nu\, dt$$



$$\boxed{N(n' \to n) = N_{n'} \cdot B_{n'n}\, I_\nu\, dt}$$

missä $N_{n'}$ = tilassa n' olevien atomien lukumäärä/cm^3

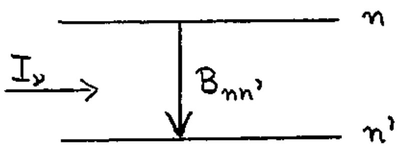
$B_{nn'}$ = absorption todennäköisyyskerroin

I = saapuvan säteilyn intensiteetti
Saapuvasta säteilystä vain taajuus $\nu = \frac{E_n - E_{n'}}{h}$ aiheuttaa absorptiota

HUOM. Absorptio ssa aallon vaihe säilyy.

3) Indusoitu emissio (negatiivinen absorptio)

Saapuvan säteilyn fotoni
laukaisee elektronin siirtymään
ylemmältä tilalta alemmalle.



$$\boxed{N(n \to n') = N_n \cdot B_{nn'} \cdot I_\nu\, dt}$$

HUOM. Indusoitu emissio on epäisotrooppista.
Vahvistunut aalto etenee samaan suuntaan ja samassa vaiheessa kuin saapuva säteily.

Nettoabsorptio saadaan vähentämällä absorptiosta indusoituneen emission osuus :

absorptio: $N(n' \to n) = N_{n'} B_{n'n} I_\nu dt$

indusoitu emissio : $N(n \to n') = N_n \cdot B_{nn'} \cdot I_\nu dt$

nettoabsorptio $= (N_{n'} B_{n'n} - N_n B_{nn'}) I_\nu dt$

HUOM. Yleensä nettoabsorptio > 0, koska alemman energiatilan miehitys $N_{n'}$ on suurempi kuin N_n. Termodynaamisessa epätasapainossa saattaa tilanne olla toisin päin ($N_n > N_{n'}$), jolloin nettoabsorptio tulee negatiiviseksi. Tällöin saapuva intensiteetti vahvistuu huomattavasti (esim. maseroivat lähteet).

4) Spontaani ja indusoitu emissio

Rajoitutaan seuraavassa tilanteisiin, joissa esiintyy vain säteilyn aiheuttamia siirtymiä sekä spontaania emissiota (ts. riittävän harva kaasu, jossa ei tapahdu atomien välisiä törmäyksiä).

Säteilytasapainossa:

$$\underbrace{N_n (A_{nn'} + B_{nn'} I_\nu) \cancel{dt}}_{\text{siirtymien lkm. alaspäin}} = \underbrace{N_{n'} B_{n'n} \cdot I_\nu}_{\text{siirtymien lkm. ylöspäin}} \cdot \cancel{dt}$$

$$\Rightarrow \quad N_n A_{nn'} = I_\nu (N_{n'} B_{n'n} - B_{nn'} N_n) \quad \Big| \; I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad \Big| : N_{n'}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N_n}{N_{n'}} A_{nn'} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \left(B_{n'n} - B_{nn'} \frac{N_n}{N_{n'}} \right) \Big| \; \text{Boltzmann: } \frac{N_n}{N_{n'}} = \frac{g_n}{g_{n'}} e^{-\overbrace{(\chi_n - \chi_{n'})}^{h\nu}/kT}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{g_n}{g_{n'}} e^{-h\nu/kT} \cdot A_{nn'} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \left(B_{n'n} - B_{nn'} \frac{g_n}{g_{n'}} e^{-h\nu/kT} \right) \quad \Big| \cdot e^{h\nu/kT}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{g_n}{g_{n'}} \cdot A_{nn'}}_{\text{vakio}} = \underbrace{\frac{2h\nu^3}{c^2} B_{n'n}}_{\text{vakio}} \; \frac{e^{h\nu/kT} - \frac{g_n}{g_{n'}} \frac{B_{nn'}}{B_{n'n}}}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Jotta atomaariset vakiot $A_{nn'}$, $B_{nn'}$ ja $B_{n'n}$ olisivat lämpötilasta riippumattomia, on lopussa esiintyvän osamäärän osoittajan oltava yhtäsuuri kuin nimittäjä :

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\dfrac{g_n}{g_{n'}} \dfrac{B_{nn'}}{B_{n'n}} = 1} \\[2ex] \dfrac{g_n}{g_{n'}} \cdot A_{nn'} = \dfrac{2h\nu^3}{c^2} \cdot B_{n'n} \end{cases} \quad \xLeftrightarrow{B_{n'n} = \frac{g_n}{g_{n'}} \cdot B_{nn'}} \quad \boxed{A_{nn'} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{nn'}}$$

Einsteinin kertoimet $A_{nn'}$, $B_{nn'}$ ja $B_{n'n}$ ovat atomaarisia vakioita, jotka voidaan määrittää kullekin siirtymälle kokeellisesti tai teoreettisesti kvanttimekaniikkaa hyväksi käyttäen. Kun yksi Einsteinin kerroin tunnetaan, saadaan muut kertoimet em. kaavoilla.

HUOM. 1 Jotta Planckin säteilylaki $I = I(T_{ex})$ olisi voimassa, on atomissa tapahduttava indusoitua emissiota (Einstein, 1917).

HUOM. 2 Kun $h\nu/kT >> 1$ (Wienin approksimaatioalue), on

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \qquad \Big| \cdot B_{nn'}$$

$$B_{nn'} I_\nu = \underbrace{B_{nn'} \frac{2h\nu^3}{c^2}}_{A_{nn'}} e^{-h\nu/kT}$$

$$\boxed{B_{nn'} I_\nu = A_{nn'} \underbrace{e^{-h\nu/kT}}_{\ll 1} \ll A_{nn'}}$$

Ts. spontaanit emissiot dominoivat UV-alueella.

Kun $h\nu/kT << 1$ (Rayleigh-Jeansin approksimaatioalue)

$$I_\nu = \frac{2\nu^2 kT}{c^2} \qquad \Big| \cdot B_{nn'}$$

$$B_{nn'} I_\nu = B_{nn'} \frac{2\nu^2 kT}{c^2} \qquad \Big| \; B_{nn'} = \frac{c^2}{2h\nu^3} A_{nn'}$$

$$\boxed{B_{nn'} I_\nu = A_{nn'} \underbrace{\frac{kT}{h\nu}}_{\gg 1} \gg A_{nn'}}$$

Ts. indusoituneet emissiot dominoivat radioalueella

b) Einsteinin kertoimien yhteys viiva-absorptiokertoimeen $\bar{k}$

Luvun 2.5.2 e-kohdassa todettiin, että yhteeen kuutiosenttimetriin absorboituneen säteilytehon määrä on

$$P_\nu = 4\pi I_\nu \bar{k} \varrho$$

Kytkemällä tämä kvanttiteoreettiseen tarkasteluun, saadaan yhdessä sekunnissa yhteen kuutiosenttimetriin väliainetta absorboituneen energian määräksi:

$$4\pi I_\nu \bar{k} \varrho \, dt = N(n' \to n) h\nu_0$$

$$= N_{n'} B_{n'n} I_\nu \, dt \, h\nu_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{k} \varrho = \frac{1}{4\pi} N_{n'} B_{n'n} h\nu_0}$$

Tarkasteltaessa todellista nettoabsorptioita, on indusoituneen emission osuus poistettava :

$$4\pi I_\nu \bar{k}' \varrho = (N_{n'} B_{n'n} - N_n B_{nn'}) I_\nu h\nu_0$$

missä $\bar{k}'$ = negatiiviset absorptiot huomioiva massa-absorptiokerroin
$N_{n'}$ = energiatilan n' miehitysluku
N_n = energiatilan n miehitysluku

$$4\pi I_\nu \bar{k}' \varrho = N_{n'} B_{n'n} \left(1 - \frac{N_n}{N_{n'}} \frac{B_{nn'}}{B_{n'n}}\right) I_\nu h\nu_0$$

Boltzmann: $\frac{N_n}{N_{n'}} = \frac{g_n}{g_{n'}} e^{-h\nu_0/kT}$

luvussa 2.5.3.a kohdassa 4:

$$\frac{g_n}{g_{n'}} = \frac{B_{n'n}}{B_{nn'}}$$

$$4\pi I_\nu \bar{k}' \varrho = N_{n'} B_{n'n} \left(1 - e^{-h\nu_0/kT}\right) I_\nu h\nu_0$$

$$4\pi I_\nu \bar{k} \varrho = N_{n'} B_{n'n} I_\nu h\nu_0$$

$$\Rightarrow N_{n'} B_{n'n} = \frac{4\pi \cancel{I_\nu} \bar{k} \varrho}{\cancel{I_\nu} h\nu_0}$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi I_\nu \overline{k'} \varrho = \frac{4\pi \overline{k} \varrho}{h\nu_0}\left(1 - e^{-h\nu_0/kT}\right) I_\nu h\nu_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{k'} = \overline{k}\left(1 - e^{-h\nu_0/kT}\right)}$$

Nettoabsorptiota tarkasteltaessa on siis absorboituneesta säteilyenergiasta vähennettävä säteilyn synnyttämät indusoituneet emissiot (negatiiviset absorptiot), jolloin massa-absorptiokerrointa $\overline{k}$ on korjattava yo. sulkutekijällä.

HUOM. Normaalissa absorptiossa $\frac{h\nu}{kT} > 0 \Rightarrow 0 < 1 - e^{-h\nu/kT} < 1$

Absorptio maseroivassa kohteessa: $\frac{h\nu}{kT_{ex}} < 0$, koska $T_{ex} < 0$ (muodollinen merkintä)

$$\Rightarrow \left(1 - e^{-h\nu/kT_{ex}}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \overline{k'} < 0$$

c) Einsteinin kertoimien yhteys oskillaattorivoimakkuuksiin

Yhdessä sekunnissa absorboituu yhteen kuutiosenttimetriin ainetta säteilyenergiaa

$$E_\nu = 4\pi I_\nu \varrho \overline{k}$$

$$\varrho \overline{k} = f \cdot N_{o\nu} \cdot \frac{\pi e^2}{mc}$$ (kts. luku 2.5.2.e)

missä f = oskillaattorivoimakkuus

$N_{o\nu}$ = atomien lkm/cm^3, joilla ominaistaajuus ν_0

Kytkemällä jälleen . klassisen teorian energia-absorptio kvanttiteorian energia-absorption lausekkeeseen saadaan

$$4\pi I_\nu \cdot f N_{0\nu} \frac{\pi e^2}{mc} = N_{n'} B_{n'n} I_\nu h\nu_0$$

Tarkasteltaessa siirtymää n'n, on $N_{0\nu}=N_{n'}$, ja $f = f_{n'n}$

$$\Rightarrow \quad B_{n'n} = \frac{4\pi}{h\nu} \frac{\pi e^2}{mc} f_{n'n}$$

Spontaanin emission todennäköisyyskertoimelle pätee

$$A_{nn'} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{g_{n'}}{g_n} B_{n'n}$$

Sijoittamalla , absorption todennäköisyyskertoimen $B_{n'n}$ lauseke saadaan

$$\boxed{A_{nn'} = \frac{g_{n'}}{g_n} \frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{mc^3} f_{n'n} = \frac{g_{n'}}{g_n} \cdot 3\gamma \cdot f_{n'n}}$$

Huomioimalla, että klassisen säteilijän vaimennuskerroin on

$$\gamma = \frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{3mc^3} = \frac{0.2223}{(\lambda\,[cm])^2}$$

voidaan oskillaattorivoimakkuudet f ilmaista Einsteinin kertoimien avulla :

$$\boxed{f_{n'n} = \frac{1}{3\gamma} \frac{g_n}{g_{n'}} A_{nn'}} = 1.5 \times 10^{-8} (\lambda\,[\mu m])^2 \cdot \frac{g_n}{g_{n'}} A_{nn'}$$

<u>HUOM</u>. Liitteessä II on kvanttimekaaninen "johto" oskillaattorivoimakkuuden lausekkeelle.

d) Säteilyvaimennuksen kvanttimekaaninen lauseke

Mikäli säteilykenttä ei vaikuta, on atomin lähettämä säteily yksinomaan spontaania emissiota. Ylemmässä energiatilassa n olevien atomien lukumäärä pienenee tällöin seuraavasti.

$$\frac{dN_n}{dt} = -N_n \sum_{n'} A_{nn'}$$

$$\Rightarrow \quad N_n = N_n(0)\, e^{-\sum_{n'} A_{nn'} t}$$

Vertaamalla tätä klassisen oskillaattorin säteilyenergiaan $W = W_0 e^{-\gamma t}$ saadaan vaimennuskertoimen kvanttimekaaniseksi lausekkeeksi

$$\boxed{\Gamma_n = \sum_{n'} A_{nn'}}$$ SÄTEILYVAIMENNUS, KUN SÄTEILYKENTTÄ EI VAIKUTA.

Samoin kuin $1/\gamma$ edusti klassisen säteilijän keskimääräistä elinikää, edustaa $T = 1/\Gamma_n$ atomin keskimääräistä elinikää tilassa n.

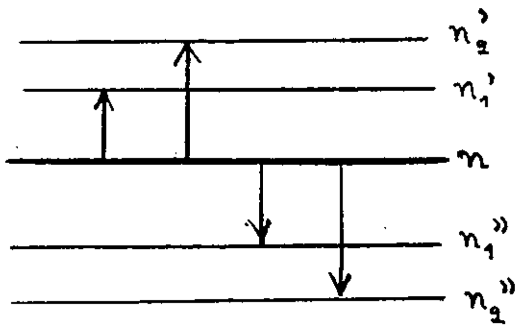
HUOM. Tarkemmat laskut osoittavat, että energiatilojen n ja n' välisessä siirtymässä on säteilyvaimennus

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_{n'}$$

Mikäli säteilykenttä vaikuttaa riippuu viritystilan miehitys myös virityksistä korkeampiin energiatiloihin sekä negatiivisesta absorptiosta. Tällöin

$$\boxed{\Gamma_n = \sum_{n''} A_{nn''} + \sum B_{nn'} I(\nu_{nn'}) + \sum_{n''} B_{nn''} I(\nu_{nn''})}$$

SÄTEILYVAIMENNUS, KUN SÄTEILYKENTTÄ VAIKUTTAA



Käyttämällä hyväksi yhtälöitä $I = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$ (Planckin funktio)

$$g_n B_{nn'} = g_{n'} B_{n'n}$$

$$\frac{g_n}{g_{n'}} A_{nn'} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{n'n}$$

$$\frac{g_n}{g_{n'}} A_{nn'} = \frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{mc^3} f_{n'n}$$

voidaan . säteilyvaimennuksen lauseke kirjoittaa muotoon

$$T_n = \frac{8\pi e^2}{mc} \left[\sum_{n'} \frac{g_{n'}}{g_n} \frac{f_{n'n}}{\lambda^2} \frac{1}{1-e^{-h\nu/kT}} + \sum_{n''} \frac{f_{nn''}}{\lambda^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} \right]$$

<u>HUOM.</u> Radio- ja infrapuna-alueella, jossa $h\nu/kT >> 1$, on

$$I_\nu = \frac{2kT\nu^2}{c^2} \qquad \text{(Rayleigh-Jeans approksimaatio)}$$

Jättämällä siirtymät ylemmille energiatasoille n' pois tarkastelusta sekä huomioimalla Einsteinin kertoimien välinen yhteys $B_{nn''} = \frac{c^2}{2h\nu^3} \cdot A_{nn''}$, saadaan

$$T_n = \sum_{n''} \left[A_{nn''} + B_{nn''} \frac{2kT\nu^2}{c^2} \right] = \sum_{n''} A_{nn''} \left[1 + \frac{kT}{h\nu} \right]$$

Koska spontaanit emissiot eivät ole tärkeitä tällä aaltoalueella voidaan sulkulausekkeessa oleva 1 jättää huomiotta, jolloin

$$\boxed{\Gamma_n \approx \frac{kT}{h\nu} \sum_{n'} A_{nn'}}$$ SÄTEILYVAIMENNUS RADIOALUEELLA

ESIM. CaII ionin resonanssiviiva K(3933Å) vastaa siirtymää $4\ ^2S_{\frac{1}{2}} - 4\ ^2P_{3/2}$ (termin yläindeksi = 2S+1, alaindeksi = J = L ± S) Siirtymälle laskettu Einsteinin kerroin $A = 1.59 \times 10^8$, jolloin $f = 1.5\ 10^{-8} (\lambda [\mu m])^2 \frac{g_n}{g_{n'}} A_{nn'} = 0.738$.

Koska CaII energiatasokaaviossa on $4\ ^2P$- tason alapuolella vielä $3\ ^2D$ - taso, on huomioitava myös nämä siirtymät

siirtymälle $3\ ^2D_{3/2} - 4\ ^2P_{3/2}$: $\lambda = 8498$, $A = 1.4 \times 10^7$

$3\ ^2D_{5/2} - 4\ ^2P_{3/2}$: $\lambda = 8542$, $A = 1.2 \times 10^7$

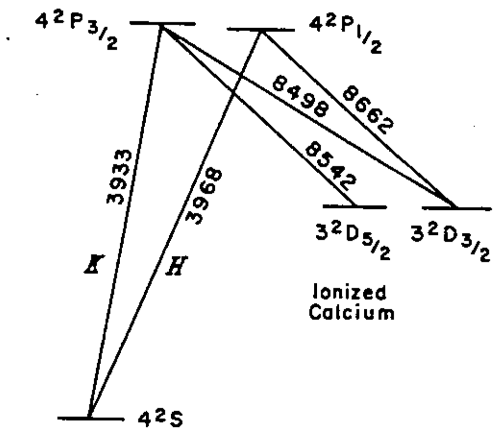
K-viivan vaimennusvakio on siten

$$\Gamma = \sum_{n'} A_{nn'} = 1.59 \times 10^8 + 0.12 \times 10^8 + 0.014 \times 10^8 = 1.72 \times 10^8 \ 1/s$$

Klassinen vaimennusvakio puolestaan on

$$\gamma = \frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{3mc^3} = \frac{0.2223}{(\lambda [cm])^2} = 1.45 \times 10^8 \ \frac{1}{s}$$

Täten $\Gamma = 1.19\ \gamma$ tässä esimerkissä.

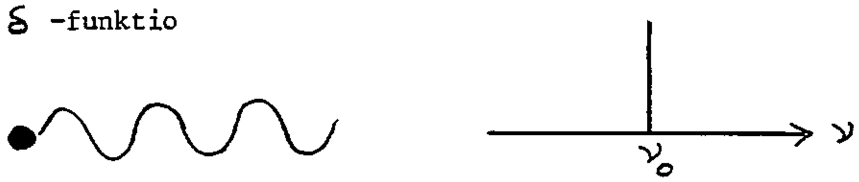


2.5.6 Spektriviivaprofiilit

Ideaalitapaus: Elektroni siirtyy kahden tarkasti määritellyn energiatason välillä:

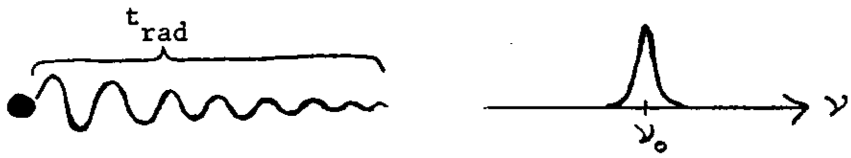
$$\Delta E = h\nu$$

Tässä tapauksessa on äärettömyyteen ulottuvan aaltojonon taajuus täsmälleen ν, ja absorptiokerroin on muodoltaan δ -funktio



Todellisuus: Äärelliset aaltojonot, jotka kestävät ajan t verran. Aaltojen Fourieranalyysi leventää spektriviivaa $\Leftrightarrow$ atomin energiatasojen epätarkkuus.

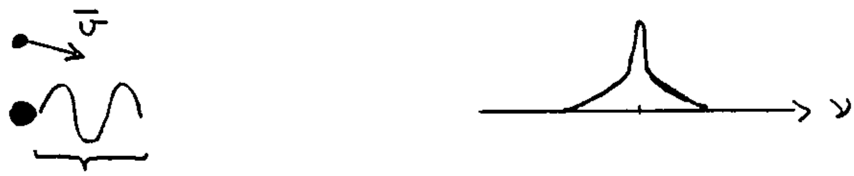
$\Longrightarrow$ spektriviivan luonnollinen leveneminen



säteilyvaimennus

Säteilyvaimennuksen aikana häiritsevät myös atomien väliset törmäykset

$\Longrightarrow$ törmäysleveneminen



t_o: atomi voi häiriöttömästi säteillä vain ajan t_o

Lisäksi atomit liikkuvat eri nopeuksilla, ja absorboivat säteilyä siten eri taajuuksilla.

$\Longrightarrow$ viivan Dopplerin leveneminen eli terminen leveneminen

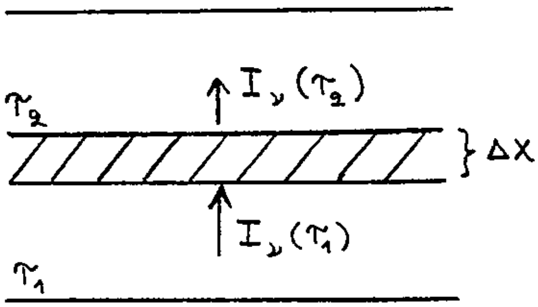
a) Säteilyvaimennuksen aiheuttama viivan luonnollinen leveneminen

Säteilyn kulkiessa Δx paksuisen atmosfäärikerroksen läpi heikentyy intensiteetti :

$$I_\nu(\tau_2) = I_\nu(\tau_1)\, e^{-k_\nu \rho \Delta x}$$

, missä τ_1 = alemman atmosfäärikerroksen optinen syvyys

τ_2 = ylemmän atmosfäärikerroksen optinen syvyys



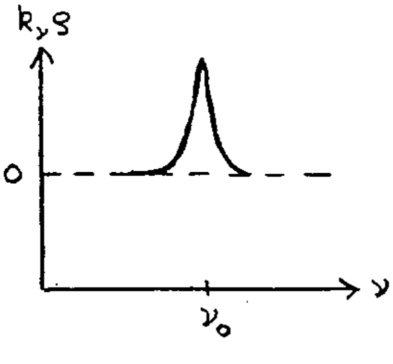
Oletetaan seuraavassa, että tarkastelukerroksella on pieni optinen syvyys, ts. $\tau_2 - \tau_1 \ll 1$. Tällöin

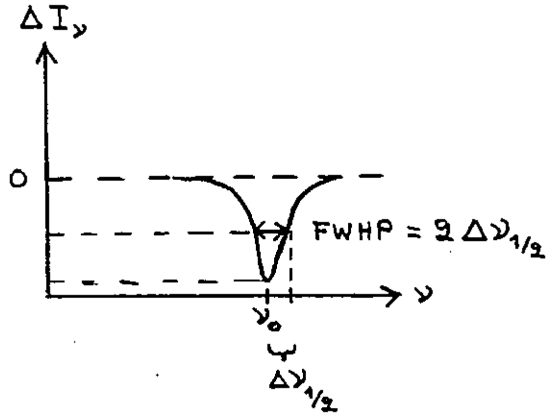
$$I_\nu(\tau_2) = I_\nu(\tau_1)\,(1 - k_\nu \rho\, \Delta x)$$

$$\Rightarrow \quad I_\nu(\tau_2) - I_\nu(\tau_1) = -\, k_\nu \rho\, \Delta x$$

$$\Delta I_\nu = -\,\Delta x \cdot \frac{N_{0\nu} e^2}{mc}\, \frac{\gamma/4\pi}{(\nu-\nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2}$$

Todetaan, että absorboitunut intensiteetti on verrannollinen absorptiokertoimeen $k_\nu \rho$.





Viivan absorptiomaksimi saadaan resonanssitapauksessa, kun säteilyn taajuus on yhtäsuuri kuin värähtelijän ominaistaajuus.

$$\Delta I_{\nu_0} \overset{\nu=\nu_0}{=} -\Delta x \, \frac{N_{o\nu} e^2}{mc} \, \frac{\gamma/4\pi}{0+(\gamma/4\pi)^2}$$

Absorptiomaksimin puolivälissä :

$$\Delta I_{\nu} = \frac{1}{2}\Delta I_{\nu_0} = -\Delta x \, \frac{N_{o\nu} e^2}{mc} \, \frac{\gamma/4\pi}{(\nu-\nu_0)^2+(\gamma/4\pi)^2}$$

$$\Rightarrow (\nu-\nu_0)_{1/2} = \Delta\nu_{1/2} = \frac{\gamma}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{FWHP = 2\left|\Delta\nu_{1/2}\right| = \frac{\gamma}{2\pi}}$$

LUONNOLLISEN VIIVAPROFIILIN (Lorentz-profiilin) PUOLIARVOLEVEYS

missä FWHP on lyhennys sanoista "full width at half power".

HUOM. 1 Klassisessa teoriassa luonnollinen leveneminen ei riipu siirtymän taajuudesta :

$$FWHP = 2\,\Delta\nu_{1/2} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{3mc^3}$$

$$\underline{\underline{2\,\Delta\lambda_{1/2}}} = \frac{c}{\nu^2}\cdot 2\,\Delta\nu_{1/2} = \frac{4\pi e^2}{3mc^2} = \underline{\underline{0.00024\ \text{Å}}}$$

HUOM. 2 Aikaisemmin todettiin, että klassisen oskillaattorin energia pienenee seuraavasti:

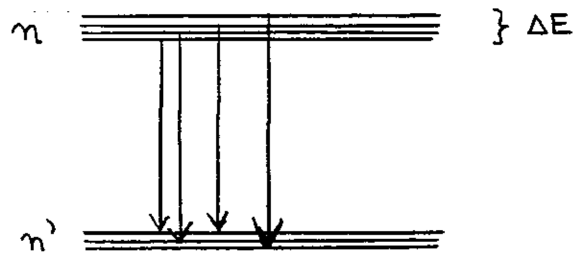
$$W(t) = W_0\, e^{-\gamma t} \quad , \text{ missä } \gamma = \frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{3mc^3} = \text{vaimennuskerroin}$$

$$\gamma = \frac{1}{T} \text{ , T = värähdystilan elinikä}$$

Säteilyvaimennuksen aiheuttama puoliarvoleveys ja värähdystilan elinikä kytkeytyvät siten toisiinsa :

$$\boxed{FWHP = \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{1}{2\pi T}}$$

Klassisessa teoriassa viivan leveneminen aiheutuu siitä, että sidottu elektroni voi värähdellä ominaistaajuuden ν_o molemmin puolin samalla vaimentuen. Kvanttiteoriassa spektriviivan leveneminen aiheutuu siitä, että energiatasot eivät ole aivan tarkkoja, vaan niissä esiintyy epämääräisyys ΔE, joka liittyy energiatilan elinikään Δt Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen mukaisesti.



Energiatilan elinikä :

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx h \quad \Rightarrow \quad \Delta t \approx \frac{h}{\Delta E} \approx \frac{1}{\Gamma}$$

Perustilan ikä on pitkä, joten ΔE on pieni ja perustilaan liittyvät viivat ovat suhteellisen kapeita. Ylempien lyhytikäisten tilojen välisistä siirtymistä aiheutuvat viivat ovat vastaavasti leveämpiä. Mitä todennäköisempi siirtymä on, sitä leveämpi on viiva:

$$\Delta E \sim \Gamma = \sum_{n'} A_{nn'}$$

b) Atomien lämpöliikkeen aiheuttama spektriviivan leveneminen

Dopplerin periaatteen mukaisesti on hiukkasen nopeuskomponentti näkösäteen suunnassa

$$v_r = c\,\frac{\Delta\nu}{\nu_o}$$

Atomien lämpöliikkeestä johtuva säteisnopeushajontaa kuvaa parametri $\Delta\nu_D$, joka kytkeytyy hiukkasten todennäköisimpään nopeuteen $\alpha = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$.
($\Delta\nu_D$ kuvaa todennäköisimmällä nopeudella liikkuvan atomin Dopplerin siirtymää)

$$\alpha = c\,\frac{\Delta\nu_D}{\nu_o} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D} = \frac{\Delta\nu \cdot c}{\alpha\,\nu_o} = \frac{v_r}{\alpha}$$

Huomioimalla nopeusvälissä (v,v+dv) olevien hiukkasten lukumäärä/cm^3 eli Maxwellin nopeusjakautuma näkösäteen suunnassa saadaan

$$dN(v_r) = N\sqrt{\frac{m}{2kT\pi}}\, e^{-\frac{m}{2kT}v_r^2}\, dv_r \qquad \Big|\ dv_r = c\,\frac{d\nu}{\nu_0}$$

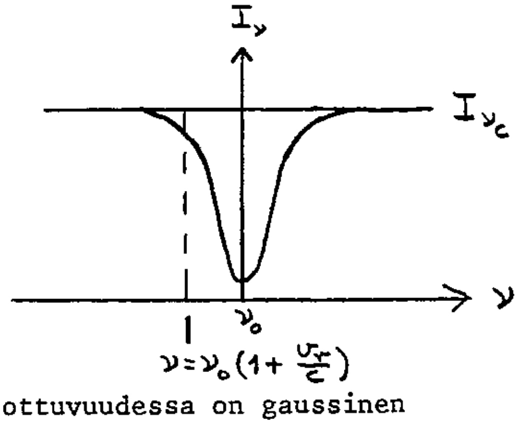
$$= N\,\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\, e^{-\left(\frac{v_r}{\alpha}\right)^2}\cdot\frac{c}{\nu_0}\,d\nu \qquad \Big|\ \frac{c}{\alpha\nu_0} = \frac{1}{\nu_D}$$

$$= N\,\frac{1}{\Delta\nu_D\sqrt{\pi}}\, e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2}\, d\nu$$

Koska viivan luonnollinen leveys on huomattavasti pienempi kuin lämpöliikkeestä johtuva viivan leveneminen, voidaan olettaa, että jokainen atomi absorboi säteilyä vain yhdellä taajuudella $\nu = \nu_0\left(1+\frac{v_r}{c}\right)$. Koska säteilyintensiteetin absorptio on verrannollinen taajuudella ν absorboivien atomien lukumäärään, on

$$\frac{(I_{\nu_c}-I_\nu)\,d\nu}{\int_{\text{viiva}}(I_{\nu_c}-I_\nu)\,d\nu} = \frac{dN(v_r)}{N}$$, missä I_{ν_c} = kontinuumin intensiteetti

$$\frac{\Delta I_\nu\, d\nu}{\int_{\text{viiva}}\Delta I_\nu\, d\nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Delta\nu_D}\, e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2} d\nu$$



Koska Maxwellin nopeusjakautuma yhdessä ulottuvuudessa on gaussinen on myös spektriviivan Doppler-profiili gaussinen.

Viivan puoliarvoleveys FWHP = 2 $\Delta\nu_{1/2}$ saadaan ehdosta

$$\frac{\Delta I(\nu)}{\Delta I(\nu_0)} = \frac{e^{-\left(\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\Delta\nu_D}\right)^2}}{e^{-0}} = \frac{1}{2} \qquad \Big| \ln$$

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\Delta\nu_D}\right)^2 = \ln 1 - \ln 2$$

$$\Rightarrow \quad (\Delta\nu_{1/2})^2 = (\Delta\nu_D)^2 \ln 2 \qquad \Big| \Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c}\alpha = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\nu_{1/2} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}\ln 2}$$

$$\boxed{\mathrm{FWHP} = 2\Delta\nu_{1/2} = \frac{2\nu_0}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}\cdot\ln 2}}$$

TERMINEN VIIVAN LEVENEMINEN (Doppler-leveneminen)

HUOM. 1 Spektriviivan leveys riippuu absorboivan molekyylin massasta. Mitä suurempi molekyylin massa, sitä pienempi on molekyylin nopeus ja sitä kapeampi on spektriviiva. Todettakoon, että turbulenttisen liikkeen aiheuttama viivan leveneminen ei riipu molekyylin massasta.

HUOM. 2 Mittaamalla spektriviivan puoliarvoleveys voidaan määrittää yläraja tarkastelukohteen lämpötilalle - yläraja siitä syystä, että mahdollisen turbulenttisen liikkeen läsnäollessa on hiukkasten todennäköinen nopeus

$$\alpha = \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_t^2}$$

, missä v_t= turbulenttisen liikkeen säteisnopeus

c) Atomien törmäyksistä aiheutuva viivan leveneminen

Lähiatomien häiriöiden vuoksi säteilevän atomin energiatasot siirtyvät. Siirtymän määrä riippuu häiritsijän etäisyydestä r. Alla olevassa kuvassa on kaksi energiatasoa esitetty r:n funktiona. Häiriintymättömässä tilassa tasojen välinen etäisyys vastaa säteilytaajuutta ν_o. Häirityssä tilassa sen sijaan taajuus $\nu \neq \nu_o$, koska energiatasot ovat hieman siirtyneet. Eri atomeilla on häiritsijä eri etäisyydellä r, joten törmäysvaimennuksen seurauksena spektriviiva levenee ja samalla myös siirtyy pois häiriintymättömän säteilijän keskustaajuudelta ν_o.

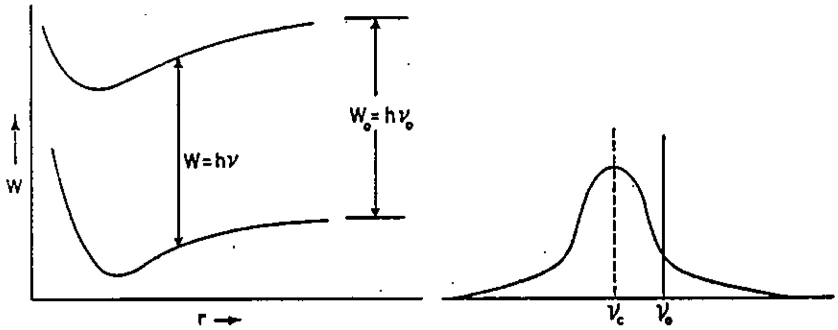
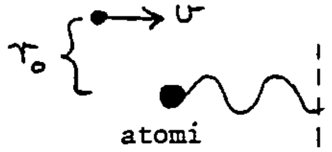


FIG. COLLISIONAL DISPLACEMENT OF A SPECTRAL LINE
The left part of the figure depicts the distortion of the energy levels as a function of the separation r between the atom and perturber. The undisturbed frequency is ν_0. The resultant spectral line (right) not only is broadened because encounters take place at different r values but is shifted as well.

Törmäysvaimennuksen vakio τ_{coll} riippuu häiritsevien atomien (tai ionien) tiheydestä N_b, niiden suhteellisesta nopeudesta v säteilevän atomin suhteen sekä etäisyydestä r_o, jolle häiritsijän on vähintään tultava, jotta se aiheuttaisi vaimennusta. Säteilyä vaimentavien törmäysten lukumäärä aikayksikössä on tällöin

$$S = \frac{N_b \cdot dV}{dt}$$

$$S = N_b \cdot \pi r_o^2 \cdot v$$



missä πr_o^2 on ns. vaikutusala.

Tavallisesti kirjoitetaan

$r_o = \text{const.} \cdot v^{-\frac{1}{n-1}}$, missä n riippuu häiritsevän hiukkasen lajista.

Esim. n = 2 (lineaarinen Stark efekti) :elektronien ja ionien aiheuttamat häiriöt vety- ja heliumatomeille

n = 4 (kvadraattinen Stark efekti) : Elektronien ja ionien aiheuttamat häiriöt muille alkuaineille

n = 6 (Van-der-Waals voima) : neutraalien hiukkasten (esim. H) aiheuttamat häiriöt.

Törmäysvaimennuksen aiheuttama absorptio voidaan laskea tavallisesta absorptiokertoimen $k_\nu S$ yhtälöstä, kunhan säteilynvaimennusvakion korvaa törmäysvaimennusvakiolla

$$\Gamma_{coll} = \frac{2}{T_o} = 2S$$

missä T_o = keskimääräinen häiritsevien törmäysten välinen aika (ts. atomi voi häiriöttömästi säteillä vain ajan T_o)

$$\boxed{\Gamma_{coll} = 2\pi r_o^2 v N_b}$$

d) Yhdistetty luonnollinen leveneminen, Doppler leveneminen ja törmäysleveneminen

Johdetaan seuraavassa kokonaisabsorptiokertoimen lauseke atomia ja taajuusyksikköä kohti, jossa huomioitu lämpöliikkeestä johtuva spektriviivan leveneminen, törmäysleveneminen (jolloin $\Gamma_{eff} = \Gamma_{rad} + \Gamma_{coll}$) sekä luonnollinen leveneminen, jossa absorptiokerroin yhtä atomia kohden on

$$\alpha_\nu = f \cdot \frac{\pi e^2}{mc} \frac{\Gamma_{rad}}{4\pi^2} \frac{1}{(\nu-\nu_o)^2 + (\Gamma_{rad}/4\pi)^2}$$

Atomin liikkuessa nopudella v havaitsijan suhteen on viivan maksimi siirtynyt määrällä $\Delta\nu = \frac{v}{c}\nu_0$, joten viivan havaittu taajuus on

$$\nu_{hav} = \nu_0 - \frac{v}{c}\nu_0$$

(huom. etäisyyden kasvaessa ν_{hav} pienenee ja v on positiivinen)

Yhden atomin absorptiokerroin on tällöin

$$\alpha_\nu = f\,\frac{\pi e^2}{mc}\,\frac{\Gamma_{eff}}{4\pi^2}\,\frac{1}{(\underbrace{\nu-\nu_0-\frac{v}{c}\nu_0}_{\nu-(\nu_0+\Delta\nu)})^2+(\Gamma_{eff}/4\pi)^2}$$

Kokonaisabsorptiokerroin saadaan kertomalla tämä lauseke niiden atomien lukumäärällä, joiden nopeus on välissä (v,v+dv) sekä integroimalla yli kaikkien niiden nopeuksien, jotka aiheuttavat emissiota (tai absorptiota) taajuudella ν .

$$k_\nu \varrho = \int_N \alpha_\nu \, dN$$

, missä dN = nopeusvälissä (v,v+dv) olevien atomien lukumäärä

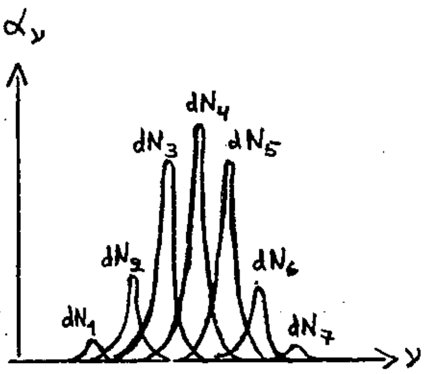
$$dN = N\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\, e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv$$

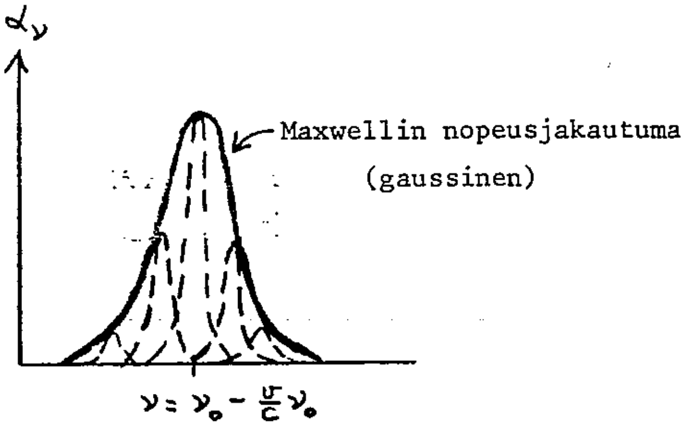
$$k_\nu \varrho = \int_N \alpha_\nu \cdot N\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\, e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv$$

Sijoittamalla α_ν saadaan

$$k_\nu \varrho = N\cdot f\,\frac{\pi e^2}{mc}\,\frac{\Gamma_{eff}}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}{(\nu-\nu_0-\frac{v}{c}\nu_0)^2+(\Gamma_{eff}/4\pi)^2}\,dv$$

Viivaprofiilin muodon määrää yo. integraalilauseke, jossa "summataan" yli yksittäisten Lorentz-profiilien. Lorentz-profiilien "verhokäyrän" muoto riippuu siitä, kuinka paljon atomeja on "painoina" kullekin Lorentz-viivalle.





Doppler- liikkestä johtuen
on viivan maksimi siirtynyt
määrällä $\Delta\nu = \frac{v}{c}\nu_0$

Jotta α_ν voitaisiin esittää muodollisesti hieman yksinkertaisemmalla lausekkeella, tehdään seuraavat muokkaukset.

$$\alpha_\nu = f \cdot \frac{\pi e^2}{mc}\frac{\Gamma_{eff}}{4\pi^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot \sqrt{\frac{m}{2kT}}\,dv}{(\nu-\nu_0-\frac{v}{c}\nu_0)^2+(\Gamma_{eff}/4\pi)^2}$$

Merk. $y = \sqrt{\frac{m}{2kT}}\,v$

$dy = \sqrt{\frac{m}{2kT}}\,dv$

$$\alpha_\nu = f\,\frac{\pi e^2}{mc}\frac{\Gamma_{eff}}{4\pi^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}\,dy}{(\nu-\nu_0-\frac{v}{c}\nu_0)^2+(\Gamma_{eff}/4\pi)^2}$$

lavennetaan Δ_D^2 :llä

$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}}$

(kuvaa Dopplerin levenemistä)

$$\alpha_\nu = \frac{f}{\Delta\nu_D}\frac{\pi e^2}{mc}\frac{\Gamma_{eff}}{4\pi\Delta\nu_D}\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}\,dy}{\frac{[(\nu-\nu_0)-\frac{v}{c}\nu_0]^2+(\Gamma_{eff}/4\pi)^2}{\Delta\nu_D^{\,2}}}$$

$\frac{v}{c}\nu_0 = \Delta\nu$

$$\alpha_\nu = \frac{f}{\Delta\nu_D}\frac{\pi e^2}{mc}\frac{\Gamma_{eff}}{4\pi\Delta\nu_D}\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}\,dy}{\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}-\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2+\left(\frac{\Gamma_{eff}}{4\pi\,\Delta\nu_D}\right)^2}$$

Merkitään $\alpha_0 = \frac{f}{\Delta\nu_D}\frac{\pi e^2}{mc}$

$$a = \frac{\Gamma_{eff}}{4\pi\,\Delta\nu_D}$$

$$u = \frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}$$

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D} = \frac{\nu_0\frac{v}{c}}{\frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}}} = \frac{v}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}} = y$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_\nu = \alpha_0 \frac{a}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}\, dy}{(u-y)^2 + a^2} = \alpha_0 \cdot H(a,u)}$$

VIIVAPROFIILIN YLEINEN MUOTO

HUOM. Vakiopaineessa ja lämpötilassa a = vakio , ja integrointi suoritetaan muuttujan y yli. Käytännön laskuja varten voidaan yo. kokonaisabsorption lauseke kirjoittaa sarjakehitelmän muotoon:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_0} = H_0(u) + a \cdot H_1(u) + a^2 H_2(u) + \ldots$$

missä funktiot H_0 , H_1 ,... arvot on taulukoitu u:n funktiona.

Teoreettiset laskut osoittavat, että säteilyvaimennuksesta aiheutuva viivaprofiili (kuvan katkoviiva) eroaa säteily- ja törmäysvaimennuksen viivaprofiilista (kuvan yhtenäinen viiva).

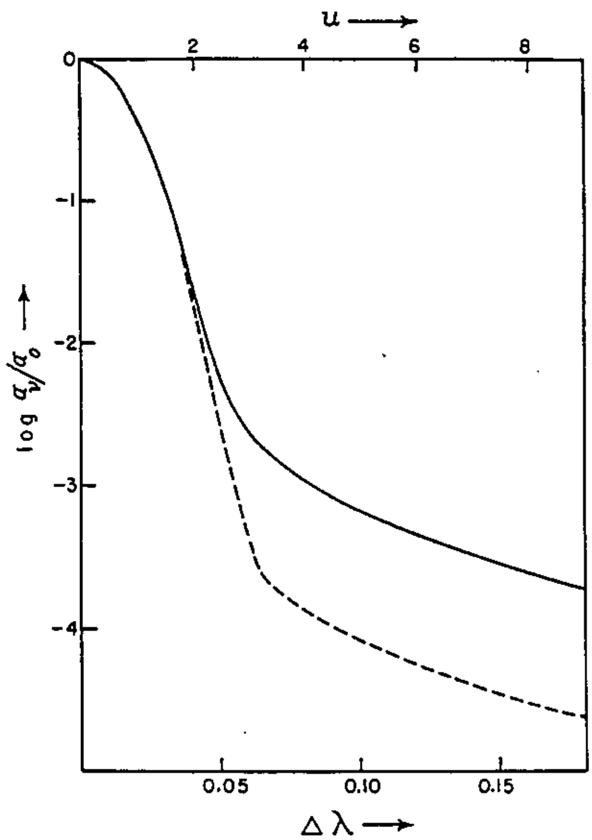


FIG. THE LINE ABSORPTION COEFFICIENT FOR CA II λ3933
We plot log α_ν/α_0 against u and $\Delta\lambda$ as abscissa for T = 5700°K. The solid curve applies to combined radiation and collisional broadening at a gas pressure of 7.2 × 10⁴ dynes; the dotted curve applies for radiation damping alone.

Lämpöliikkeestä aiheutuva viivaprofiili käyttäytyy kuten $e^{-\frac{m}{2kT}v_r^2}$,
jolloin FWHM $\propto \sqrt{T}$. Täten viiva levenee lämpötilan kohotessa.

Säteilyvaimennuksen aiheuttaman absorptiokertoimen lausekkeesta

$$\alpha_\nu = f \cdot \frac{\pi e^2}{mc} \frac{\Gamma_{rad}}{4\pi^2} \frac{1}{(\nu-\nu_0)^2 + (\Gamma_{rad}/4\pi)^2}$$

nähdään, että alueella $|\nu - \nu_0| \gg \frac{\Gamma_{rad}}{4\pi}$ (eli kun ollaan reilusti Lorentzprofiilin puoliarvoleveyden ulkopuolella) spektriviivan voimakkuus heikkenee kuten $(\nu - \nu_0)^{-2}$.

Törmäysvaimennus taas synnyttää spektriviivalle voimakkaat "siivet", jotka ovat paljon merkittävämmät kuin säteilyvaimennuksen aiheuttamat siivet.

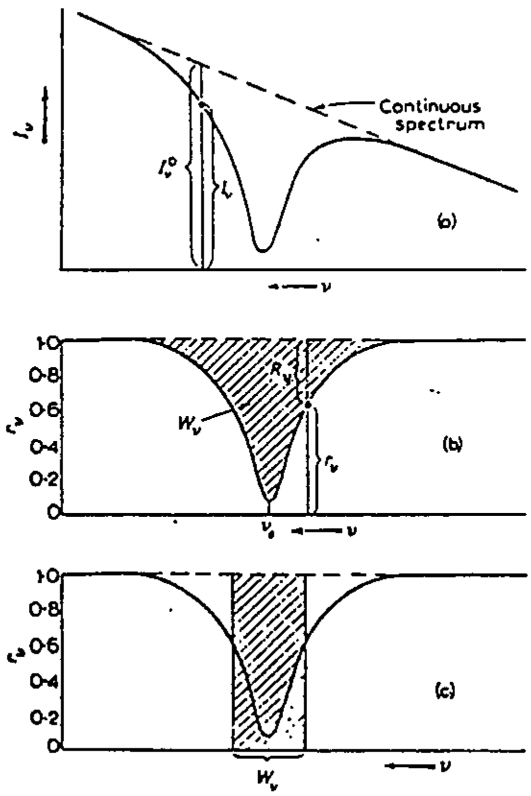
Todettakoon, että törmäysleveneminen on verrannollinen tarkastelukohteessa vallitsevaan paineeseen.

e) Spektriviivojen voimakkuudet ja kasvukäyrä

Spektriviivojen voimakkuus ilmaistaan viivojen ekvivalentti leveyden W_ν avulla.

$$\underbrace{1 \cdot W_\nu}_{\text{suorakaiteen ala}} = \boxed{W_\nu = \int \frac{I_0 - I_\nu}{I_0}\, d\nu}$$ EKVIVALENTTI LEVEYS

missä I_0 = kontinuumin intensiteetti
I_ν = viivan intensiteetti



Mikäli approksimoidaan, että kaikilla viivoilla on samanlainen profiili, voidaan spektriviivan pinta-ala kytkeä ekvivalentti leveyden käsitteeseen. Oheinen kuva esittää, miten ekvivalentti leveys mitataan.

Ensin normeerataan intensiteetti niin, että se tulee kontinuumispektrissä yksikön suuruiseksi. Sitten mitataan spektriviivan intensiteetin ja kontinuumin väliin jäävän alueen pinta-ala. Lopuksi piirretään suorakaide, jonka korkeus on = 1 ja ala sama kuin yllä mainittu pinta-ala. Näin syntyneen suorakaiteen leveys on spektriviivan ekvivalentti leveys W_ν.

Jos absorboivan kerroksen optinen syvyys on pieni, on

$$I = I_o e^{-\varrho k \Delta x} \approx I_o(1 - \varrho k \Delta x) = I_o\,(1 - N\alpha_\nu \Delta x)$$

Tällöin

$$W_\nu = \int \frac{I_o - I_\nu}{I_o}\, d\nu = \int N \alpha_\nu \Delta x \, d\nu$$

Integrointi suoritettu luvussa 2.5.2.e, joten tuloksena saadaan

$$\boxed{W_\nu = \Delta x \frac{\pi e^2}{mc} f N}$$

EKVIVALENTTI LEVEYS (kun $\tau \ll 1$)

missä N = atomien (tai ionien) lukumäärä tietyssä viritystilassa, joka on ko. siirtymän lähtötaso

Δx = atmosfäärikerroksen paksuus

Kun ekvivalenttileveys W_ν esitetään fN:n funktiona saadaan ns. kasvukäyrä , joka pienillä τ :n arvoilla on lineaarinen funktio (kuva b)

Kuva (a) esittää viivaprofiilin teoreettista muotoa (absorptioviivan puolikas), kun N:n arvo kasvaa kertoimella 10^5. Nähdään, että absorptioviiva syvenee ja levenee absorboivien atomien lukumäärän kasvaessa. Pienillä N:n arvoilla kuvan absorptioviivan puolikas on Doppler-profiilin mukainen (tällöin kasvukäyrä $\propto$ fN). Kun $\tau \ll 1$ ei enää ole voimassa, hidastuu viivan kasvu N:n kasvusta huolimatta. Kasvukäyrään syntyy tällöin tasainen osa. N:n edelleen kasvaessa alkaa viivaprofiiliin syntyä voimakkaat, törmäysvaimennuksesta aiheutuvat siivet, jotka lopulta määräävät viivan koko muodon. Tällöin kasvukäyrä $\propto \sqrt{f N \Gamma_{eff}}$ joten eri vaimennusvakion $a = \frac{\Gamma_{eff}}{4\pi \Delta\nu_D}$ arvoilla saadaan tällä alueella toisistaan poikkeavia kasvukäyriä.

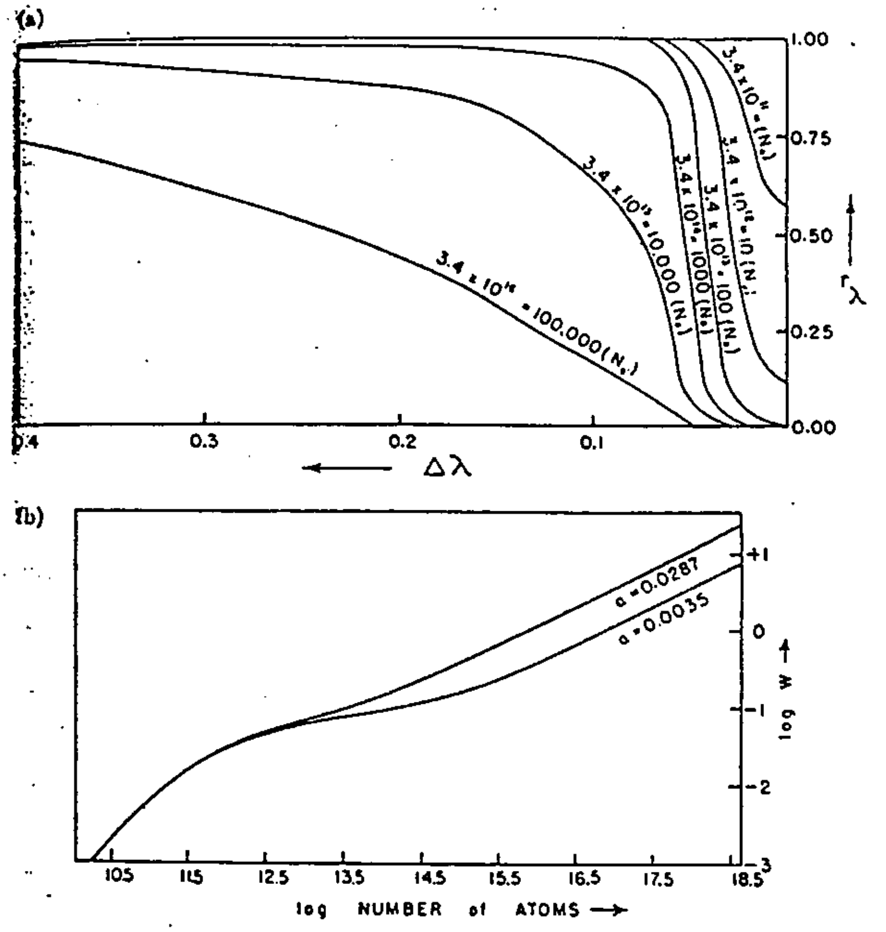


FIG. THE CURVE OF GROWTH FOR λ3933

(a) Theoretical profiles calculated for the Schuster-Schwarzschild model and pure radiation damping show how the shape of the line changes as the number of absorbing atoms increases. The number $N_0 = 3.4 \times 10^{11}$ is so chosen that the optical depth at the center of the line for N_0 atoms, X_0, will be 1. N denotes the number of atoms above the photosphere.

(b) From the integration of the profiles of Fig. 8–7a we obtain log W which we plot against log N, the number of atoms above the photosphere. Curves are given for $a = 0.0035$ and 0.0287 (see Eqs. 7–68 and 7–72).

HUOM. Kasvukäyrää voidaan käyttä alkuaineiden runsauksien karkeaan määritykseen. Menetelmässä oletetaan tietyt P_g, P_e ja T arvot. Lisäksi oletetaan, että kaikilla viivoilla on samanmuotoinen viivaprofiili, jonka jälkeen teoreettinen kasvukäyrä voidaan laskea. Kun f ja W tunnetaan, saadaan kasvukäyrän avulla N.

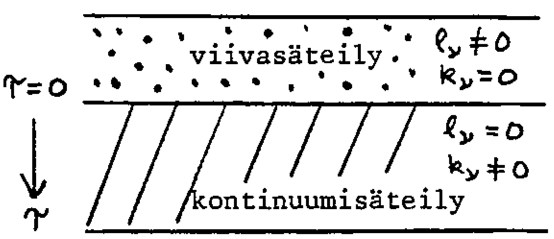
Käytännössä mitataan sellaisten absorptioviivojen ekvivalenttileveydet, joiden suhteelliset f-arvot tunnetaan. Esimerkiksi tietyn alkuaineen multiplettiviivat ovat käteviä, koska niillä on sama lähtötaso energiatasokaaviossa (siis sama N), mutta eri ekvivalenttileveydet ja oskillaattorivoimakkuudet. Vertailemalla empiiristä relaatiota $f \rightarrow W$ teoreettiseen kasvukäyrään $fN \rightarrow W$ saadaan atomien runsaus N.

Käyrien vertailu tapahtuu siten, että empiiristä käyrää siirretään vaakasuunnassa, kunnes tiettyyn viritysenergian χ arvoon kuuluvat pisteet sijoittuvat parhaiten teoreettiselle kasvukäyrälle (kts. Allerin luku 8.8)

f) Teoreettisen spektriviivaprofiilin laskeminen

Absorptioviivojen muodostumiselle tähtien atmosfääreissä on kaksi yksinkertaista mallia.

1) Schuster-Schwarzschildin malli



Viiva-absorptio syntyy harvemmassa pintakerroksessa

Jatkuva spektri muodostuu fotosfäärissä

2) Milne-Eddingtonin malli:

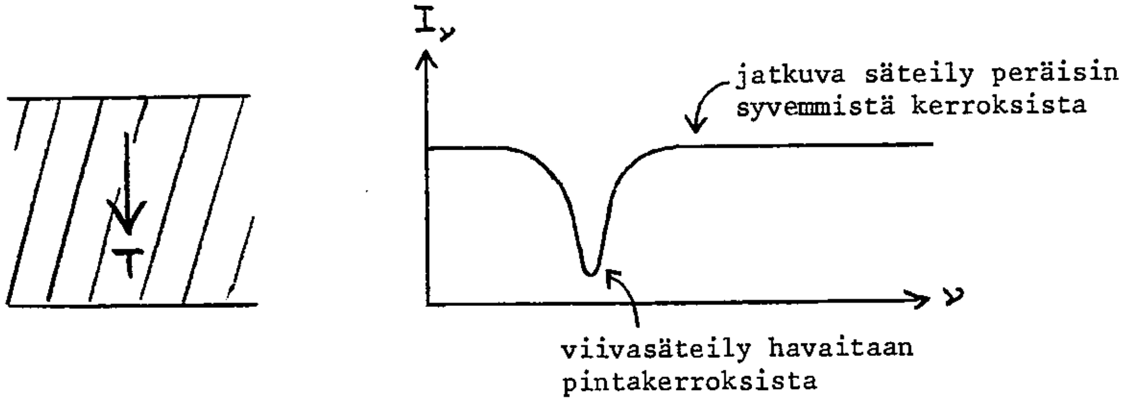
$$\frac{\text{viiva-absorptiokerroin} \quad \ell_\nu}{\text{kontinuumiabsorptiokerroin} \quad k_\nu} = \text{vakio optisen syvyyden funktiona}$$

$\Longrightarrow$ absorptioviivoja muodostuu atmosfäärin kaikissa kerroksissa

Absorptioviivan kohdalla on suurempi kokonaisabsorptiokerroin $\ell_\nu + k_\nu$

$\Rightarrow$ viivasäteilyä havaitaan vain pintakerroksista.

Koska tähden pintakerroksissa lämpötila on pienempi, on myös viivasäteilyn intesiteetti pienempi $\Rightarrow$ intensiteettikäyrän absorptioviiva



Kontinuumisäteilyn kokonaisabsorptiokerroin on pienempi kuin spektriviivan kohdalla (ℓ_ν poissa kuvioista), minkä johdosta nähdään syvempiin kerroksiin, jossa suurempi säteilyintensiteetti (T suurempi).

<u>HUOM.</u> Milne-Eddingtonin malli on fysikaalisesti oikeaoppisempi malli. Hyvin monelle absorptioviivalle on Milne-Eddingtonin malli erittäin hyvä approksimaatio.

Teoreettinen viivaprofiili saadaan ratkaisemalla säteilynkuljetusyhtälö. Yksinkertainen ratkaisu säteilynkuljetusyhtälölle saadaan Milne-Eddingtonin mallin oletuksella ℓ_ν / k_ν = vakio

Säteilynkuljetusyhtälö :

$$\cos\theta \, \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \qquad \Big| \; d\tau_\nu = (k_\nu + \ell_\nu)\,\rho\, dx$$

$$\cos\theta \, \frac{dI_\nu}{\rho\, dx} = (k_\nu + \ell_\nu)\left[I_\nu - S_\nu\right]$$

Absorboituneista kvanteista osa ε absorboituu todellisesti ja osa $1 - \varepsilon$ sirottuu eli re-emittoituu samalla taajuudella, jolloin intensiteetti I_ν alkuperäisessä suunnassa pienenee suhteessa kontinuumin (kontinuumissa ei sirontaa).

Huomioimalla sironta viivassa, voidaan viivan lähdefunktio esittää muodossa

$$S_\nu = \varepsilon \ell_\nu B_\nu + (1-\varepsilon)\ell_\nu J_\nu$$

$$\Rightarrow \cos\theta \frac{dI_\nu}{\rho dx} = \underbrace{k_\nu I_\nu - k_\nu B_\nu}_{\text{kontinuumin osuus}} + \underbrace{\ell_\nu I_\nu - [\varepsilon \ell_\nu B_\nu + (1-\varepsilon)\ell_\nu J_\nu]}_{\text{viivan osuus}}$$

Tälle Eddingtonin säteilynkuljetusyhtälölle saadaan muodollisesti toinen esitystapa merkitsemällä

$$dt = (k+\ell)\rho dx = k(1+\eta)\rho dx \quad \text{, missä} \quad \eta = \frac{\ell}{k}$$

$$L = \frac{1+\varepsilon\eta}{1+\eta} = \frac{k+\varepsilon\ell}{k+\ell}$$

$$\Rightarrow \cos\theta \frac{dI_\nu}{dt} = I_\nu - \underbrace{L \cdot B_\nu(T) - (1-L) J_\nu}_{\text{lähdefunktio } S_\nu}$$

Olettamalla, että $\boxed{\eta = \frac{\ell}{k} = \text{vakio}}$ optisen syvyyden funktiona

$\Rightarrow$ ε = vakio

$\Rightarrow$ L = vakio

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Säteilynkuljetusyhtälölle saadaan yksinkertainen ratkaisu } I_\nu(0,\theta) \text{ eli viivaprofiili}}$

(kts. ratkaisuesimerkkiä Allerin oppikirjassa s. 349-351)

Teoreettisen viivaprofiilin tarkka laskeminen (Feinanalyse) sisältää seuraavat vaiheet:

1. Oletetaan T_{eff}, g sekä atmosfäärin kemiallinen koostumus (tai oletataan näille kasvukäyrän avulla tehdyn Grobanalyysin antamat arvot), jonka jälkeen lasketaan malliatmosfäärin

   $T(\tau_0)$, $P_e(\tau_0)$, $P_g(\tau_0)$ ja $k(\tau_0)$

   missä τ_0 = optinen syvyys tietyllä aallonpituudella (esim λ = 5000Å)

2. Kun T ja P_e tunnetaan voidaan laskea k_λ , jonka jälkeen selviää τ_λ ja τ_0 välinen riippuvuus:

$$\left.\begin{aligned} \tau_\lambda &= \int_0^x k_\lambda \, dx \\ \tau_0 &= \int_0^x k_0 \, dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau_\lambda = f(\tau_0)$$

3. $$\left.\begin{aligned} P_e(\tau) \\ T(\tau) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{Saha}]{\text{Boltzmann}} \frac{N_r}{N_{tot}}$$

   missä N_r = atomien lkm., jotka voivat aiheuttaa ko. absorptioviivan

4. Oletetaan ko. alkuaineelle tietty runsaus N_{tot}

5. Oletetaan viivaprofiilin muoto (lähinnä oletetaan vaimennuskertoimen $a = \frac{\Gamma_{eff}}{4\pi \Delta\nu_D}$ arvo) sekä lasketaan absorptiokerroin viivan keskellä (kts. merkinnät luvusta 2.5.4.d)

6. Kun viivaprofiili α_λ/α_0 ja $N_r \alpha_0$ tunnetaan, saadaan viiva-absorptiokerroin laskettua:

$$\ell_\nu = N_r \alpha_0 \left(\frac{\alpha_\lambda}{\alpha_0}\right)$$

7. Tämän jälkeen lasketaan $\eta_\lambda = \dfrac{\ell_\lambda}{k_\lambda}$

ja $dt_\lambda = (1 + \eta_\lambda)\, d\tau_\lambda$

8. Valitaan absorption ja sironnan suhteellinen osuus ko. viivassa

9. Ratkaistaan säteilynkuljetusyhtälö ko. spektriviivalle

Vertaamalla teoreettista viivaprofiilia havaintoihin voidaan interpoloimalla löytää malli, joka parhaiten vastaa havaittua absorptioviivaa.

HUOM. 1 Yleensä lasketaan iso joukko malliatmosfäärejä erilaisilla parametreilla. Täten havaitun spektriviivan interpoloiminen teoreettisiin käyriin on melko mutkatonta.

HUOM. 2 $T(\tau)$, $P(\tau)$ ja kemiallinen koostumus kytkeytyvät toisiinsa. Kytkentään päästään käsiksi kasvukäyrään perustuvalla ns. Grobanalyysillä.

HUOM. 3 Jokainen tähti käsiteltävä yksilöllisesti, mitään "yleistä reseptiä" ei ole.

HUOM. 4 Tarkemmissa Feinanalyyseissä on huomioitava poikkeamat termodynaamisesta tasapainosta.

Hvaintojen kanssa yhteensopivia teoreettisia viivaprofiileja käytetään atmosfäärin kemiallisen koostumuksen määrityksiin. Erityisesti tehdään Feinanalyysejä eri spektriluokkien tyypillisille tähdille. (kts. alla olevaa taulukkoa). Hyviä tuloksia on saatu aikaisen spektriluokan tähdille (aurinkoon saakka). Sen sijaan myöhäisen spektriluokan tähdet ovat vielä problemaattisia (molekyylit, konvektiovyöhykkeet ....)

Beispiele

	τ Sco BO V	α Lyr AO V	Sonne G2 V	ε Vir G8III	α Cyg A2Ia	Population II (1)	 (2)	Ap (3)	Am (4)
1 H	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5
2 He	9.5	9.9	9.3						
6 C	6.6		7.1	7.0	6.6	4.8	6.0		6.7
7 N	6.8	7.2	6.4		7.8				
8 O	7.2	7.7	7.4		7.7				
10 Ne	7.1		6.5				6.4		
11 Na		5.4	4.8	5.1		2.2	3.5		
12 Mg	6.0	5.9	6.0	6.0	6.4	3.7	5.1	5.5	5.6
13 Al	4.7	4.2	4.9	5.0	5.3	2.3	3.4		5.1
14 Si	6.1	6.1	6.1	6.2	6.5	3.8	4.8	6.1	6.2
16 S	5.7		5.7	5.8					5.9
20 Ca		4.6	4.9	5.0	5.2	2.5	3.6	5.4	4.7
21 Sc		1.6	1.5	1.4	1.8	-0.2	0.2	2.2	1.4
22 Ti		2.8	3.1	3.1	3.5	0.8	2.3	3.7	3.2
23 V		2.5	2.6	2.6	2.8		0.7	3.3	2.8
24 Cr		4.4	4.4	4.4	4.7	2.0	3.2	6.0	4.6
25 Mn		2.6	3.9	4.0		1.9	2.2	5.3	4.0
26 Fe	5.8	5.8	5.1	5.1	5.1	3.6	4.5	6.8	6.0
27 Co			3.1	3.1	3.3	0.8	1.9	3.1	3.5
28 Ni			4.9	4.9		2.3	3.2	4.9	5.3
38 Sr		0.6	1.4	1.1	1.9	-0.9	0.2	3.9	2.2
39 Y			0.1	0.0			-0.5	0.3	0.8
40 Zr			1.2	0.5			-0.5	2.4	1.7
56 Ba			0.1	0.0			-0.6	0.9	0.8

Tabelle: Chemische Zusammensetzung für

drei Hauptreihensterne, ein Riese, ein Überriese } der Population I (s.IX,3.5)

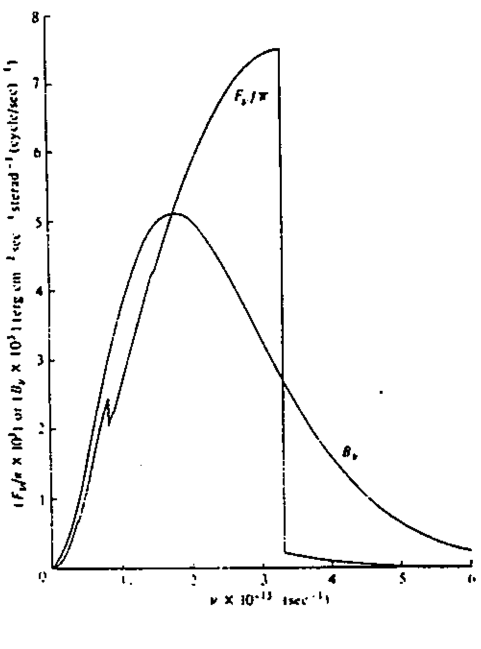
(1) Unterzwerg (Schnelläufer) HD 140 283; (2) Horizontal-Ast-Stern (Schnelläufer) HD 161817 } Population II (s.IX,3.5)

(3) Mittel aus 21 Ap-Sternen der Gruppe Sr-Cr-Eu

(4) Mittel aus 16 Am-Sternen (s.IV,9.2) (s.IV,9.2)

Angegeben ist log N bezogen auf log H = 10.5 (dies entspricht etwa der sonst häufig verwendeten Normierung auf log Si = 6.00)

Fig. . . Comparison of the Flux Distributions Emitted by a Model Atmosphere at T_{eff} = 30,000°K and a Black Body at T = 30,000°K. The model atmosphere is also represented in Fig. 4-2. Since F_ν has been divided by π, it is dimensionally equivalent to an intensity and is therefore compared directly with the Planck function $B_\nu(T)$.



Model Atmospheres

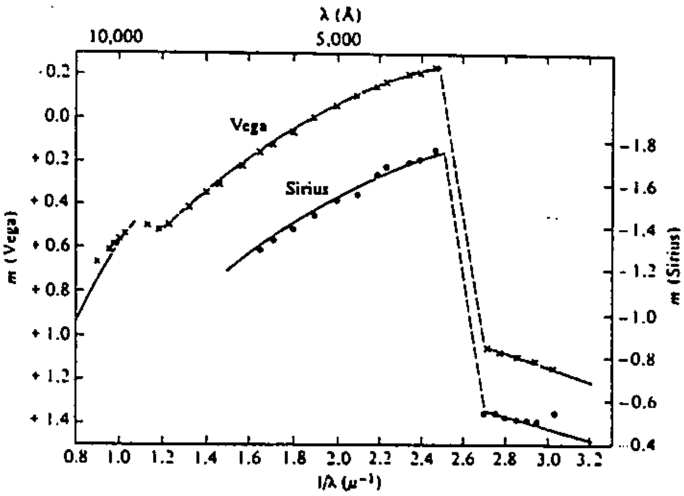


Fig. Comparison of the Observed Spectral Distributions of Vega (α Lyrae) and Sirius (α Canis Majoris) with Those of Theoretical Models. The ordinate is apparent magnitude. *Crosses* represent the observations of Vega and *dots* the observations of Sirius. *Solid lines* show the distributions for the corresponding model atmospheres. The details of the theoretical distributions in the region of the closely spaced lines near the Balmer limit (3646 Å or 2.74 μ^{-1}) are not shown, and *dashed lines* simply connect the curves on either side of the discontinuity. [Adapted from R. Schild, D. M. Peterson, and J. B. Oke, 1971 (199u).]

L I I T E   I

KAHDEN KAPPALEEN PROBLEEMA

(Newton: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica 1687)

Newtonin selvittäessä Keplerin planeettoja koskevia liikelakeja löysi hän massojen välisen vetovoiman sekä periaatteen, jolla kappaleen liikerata voidaan ennustaa, kun kappaleen ja sen ympäristön väliset vuorovaikutukset (voimat) tunnetaan.

Newtonin lait

I Kappale, johon ei vaikuta ulkoisia voimia (tai ulkoinen voimaresultantti = 0), säilyttää liiketilansa: levossa oleva kappale pysyy levossa ja liikkuva kappale jatkaa tasaista, suoraviivaista liikettä.

II Kappaleeseen vaikuttava ulkoinen voima on verrannollinen kappaleen aikayksikössä tapahtuneeseen liikemäärän muutokseen. Verrannollisuuskertoimen arvoksi valittu 1.

$$\bar{F} = \dot{\bar{p}} = \frac{d}{dt}(m\dot{\bar{r}})$$

Massan pysyessä vakiona on $\bar{F} = m\ddot{\bar{r}}$.

III Jos kappale A vaikuttaa kappaleeseen B voimalla $\bar{F}$, niin B vaikuttaa A:han voimalla $-\bar{F}$.

Huom.

1. Newtonin lait pätevät vain inertiaalikoordinaatistossa eli levossa tai tasaisessa liikkeessä olevassa koordinaatistossa.

2. Newtonin laeista seuraa dynamiikan peruslain yleistys: ulkoinen kokonaisvoima määrää mekaanisen systeemin painopisteen kiihtyvyyden siten, että
$$\sum \bar{F} = \frac{d}{dt}(M\dot{\bar{R}}_{PP})$$
, missä M = systeemin kokonaismassa.

Keplerin lait

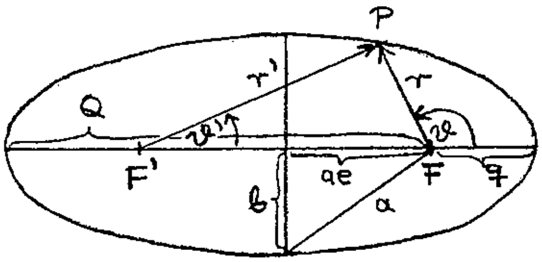
I Planeettojen radat ovat ellipsejä, joiden toisessa polttopisteessä on Aurinko. (1609)

II Auringosta planeettaan piirretty paikkavektori pyyhkii yhtä pitkissä ajanjaksoissa yhtä suuret pinta-alat. Tämä laki voidaan ilmaista myös muodossa: planeetan pintanopeus on vakio. (1609)

III Planeettojen kiertoaikojen neliöt suhtautuvat kuten niiden ratojen isoakselien kuutiot. (1619)

Ellipsin yhtälö

Kertauksena ellipsin yhtälö napakoordinaatistossa:



F, F' = polttopisteet
r, r' = paikkavektorit
e = eksentrisyys
a = isoakseli
b = pikkuakseli $= \sqrt{a^2 - a^2e^2} = a\sqrt{1-e^2}$
q = perisentrumin etäisyys
Q = (1+e)a = aposentrumin etäisyys
ϑ = todellinen anomalia

Määritelmä:

r + r' = vakio = 2a

Kuviosta: $2ae = r'\cos\vartheta' - \underbrace{r\cos\vartheta}_{\text{kuviossa negatiivinen}}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} r\cos\vartheta - r'\cos\vartheta' &= -2ae \\ r\sin\vartheta &= r'\sin\vartheta' \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{matrix} |^2 \\ |^2 \end{matrix}\right\} +$$

$$r^2 + 4aer\cos\vartheta + 4a^2e^2 = r'^2$$

Sijoitetaan tähän ellipsin määritelmästä r' = 2a-r

$$\Rightarrow \quad r^2 + 4aer\cos\vartheta + 4a^2e^2 = (2a - r)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\vartheta}}$$

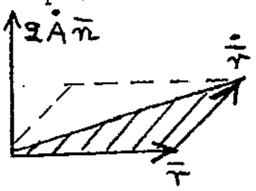
Tämä on samalla yleinen kartioleikkauksen yhtälö. Kyseessä on

hyperbeli, jos $e > 1$
parabeli, jos $e = 1$
ellipsi, jos $0 < e < 1$
ympyrä, jos $e = 0$

Keskeisvoima

Keplerin ja Newtonin II laeista seuraa, että tähteä kiertävään planeettaan vaikuttaa keskeisvoima.

Keplerin II laki $\Rightarrow$ pintanopeus $\dot{A}$ = vakio



$\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = 2\dot{A}\bar{n}$. , missä $\bar{r}$ = planeetan paikkavektori
$\bar{n}$ = yksikkövektori $\perp$ $\bar{r}$ ja $\dot{\bar{r}}$

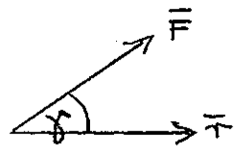
$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(2\dot{A}\bar{n}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) = \bar{r} \times \ddot{\bar{r}} + \underbrace{\dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \bar{r} \times \ddot{\bar{r}} = 0 \quad \Big| \cdot m$$

$$\bar{r} \times m\ddot{\bar{r}} = 0$$

Newtonin II laki $\Rightarrow$ $\bar{r} \times \bar{F} = 0$
$\Leftrightarrow$ $r \cdot F \cdot \sin\gamma = 0$



Koska $|\bar{r}| \neq 0$ ja $|\bar{F}| \neq 0$, seuraa ylläolevasta, että
$\gamma = 0$ eli $\bar{F} \parallel \bar{r}$ eli $\bar{F}$ on keskeisvoima.

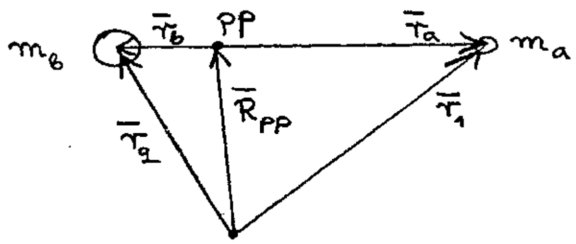
Kääntäen voidaan osoittaa, että keskeisvoimakentässä pätee Keplerin II laki (harjoitustehtävä)

Kahden kappaleen probleema

Newtonin yleinen massojen välinen vetovoimalaki on

$$\bar{F} = -G\frac{m_a m_b}{r^3}\bar{r} \quad , \quad |F| = G\frac{m_a m_b}{r^2}$$

Koska Newtonin lait pätevät ainoastaan inertiaalikoordinaatistossa, tarkastellaan seuraavassa kappaleiden a ja b liikettä painopistekoordinaatistossa.



Massakeskipisteen yleisen määritelmän mukaan

$m_a\bar{r}_1 + m_b\bar{r}_2 = (m_a+m_b)\bar{R}_{pp}$.

Valitsemalla painopiste systeemin origoksi on

$m_a\bar{r}_a + m_b\bar{r}_b = 0$

$$\Longrightarrow \qquad \bar{r}_b = -\frac{m_a}{m_b}\bar{r}_a$$

Kappaleiden välinen etäisyys on täten

$$\bar{r} = \bar{r}_a - \bar{r}_b = \left(1 + \frac{m_a}{m_b}\right)\bar{r}_a$$

Dynamiikan peruslaki kappaleelle a on siten

$$m_a\ddot{\bar{r}}_a = -G\frac{m_a m_b}{r^3}\bar{r}$$

$$\ddot{\bar{r}}_a = -G\frac{m_b}{r^3}\bar{r} = -G\frac{m_b}{r^3}\left(1+\frac{m_a}{m_b}\right)\bar{r}_a$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\bar{r}}_a = -G\frac{M}{r^3}\bar{r}_a}\,, \qquad \text{missä } M = m_a + m_b$$

Vastaavasti:

$$\boxed{\ddot{\bar{r}}_b = -G\frac{M}{r^3}\bar{r}_b}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}_a - \ddot{\bar{r}}_b = -G\frac{M}{r^3}\bar{r}}$$

Kappaleiden kiihtyvyys toistensa suhteen riippuu yksinomaan kappaleitten kokonaismassasta sekä kappaleiden välisestä etäisyydestä.

Kertomalla edellinen yhtälö puolittain lausekkeella

$$\mu = \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}\right)^{-1} = \frac{m_a m_b}{M} \quad = \text{redusoitu massa}$$

saadaan

$$\boxed{\mu\ddot{\bar{r}} = -G\frac{M\mu}{r^3}\bar{r} = -G\frac{m_a m_b}{r^3}\bar{r}}$$

Painopistekoordinaatistossa on $\overline{F}(m_a, m_b, r) = \overline{F}(M; \mu, r)$ eli kappaleen a rata kappaleen b ympäri on sama kuin μ-massaisen kappaleen rata levossa tai tasaisessa liikkeessä olevan massan M ($M = m_a + m_b$) ympäri. Sama pätee kappaleen b rataan kappaleen a ympäri. Käytännön kannalta tämä on kätevä tulos, koska paikkavektorin r aikariippuvuus voidaan suoraan havaita.

Toisin sanoen: kahden kappaleen probleema on saatu palautetuksi yhden kappaleen probleemaksi. Tämä on oleellinen ja ei-triviaalinen tulos, koska Newtonin liikelait pätevät vain inertiaalikoordinaatistossa.

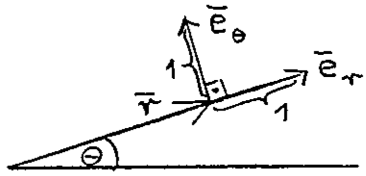
Keplerin lait Newtonin laeista johdettuna

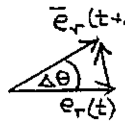
Edellä osoitettiin, että gravitaatiokentässä on kappaleitten kiihtyvyys toistensa suhteen

$$\ddot{\overline{r}} = -\frac{GM}{r^3}\,\overline{r}$$, missä M = molempien kappaleitten kokonaismassa

Sijoittamalla tähän $\overline{r}$ ja $\ddot{\overline{r}}$, jotka napakoordinaatistossa (yksikkövektorit $\overline{e}_r$ ja $\overline{e}_\theta$) esitettyinä ovat:

$$\overline{r} = r\,\overline{e}_r$$
$$\dot{\overline{r}} = \dot{r}\,\overline{e}_r + r\,\dot{\overline{e}}_r = \dot{r}\,\overline{e}_r + r\dot{\theta}\,\overline{e}_\theta$$
$$\ddot{\overline{r}} = \ddot{r}\,\overline{e}_r + \dot{r}\,\dot{\overline{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\overline{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\overline{e}_\theta + r\dot{\theta}\,\dot{\overline{e}}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\overline{e}_\theta$$

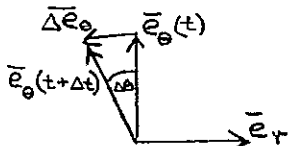




$$\Delta\overline{e}_r = \underbrace{|\overline{e}_r|}_{=1}\cdot\Delta\theta\cdot\overline{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\overline{e}}_r = \dot{\theta}\,\overline{e}_\theta$$

Vastaavasti:



$$\Delta\overline{e}_\theta = \underbrace{|\overline{e}_\theta|}_{=1}\cdot\Delta\theta\cdot(-\overline{e}_r)$$

$$\Rightarrow \dot{\overline{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\overline{e}_r$$

saadaan

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{GM}{r^2} & \text{(radiaalikomponentti)} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 & \text{(tangentiaalikomponentti)} \end{cases}$$

Tangentiaalikomponentti:
$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad | \cdot r$$
$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad | \int$$
$$r^2\dot{\theta} = \text{vakio} = h$$
$$\boxed{2\cdot\frac{dA}{dt} = h = \text{vakio}} \quad \text{KEPLER II}$$

Huomautettakoon, että tuloksesta $r^2\dot{\theta}$ = vakio ei vielä seuraa, että $\frac{L}{m}$ = vakio; liikemäärämomentissa on nimittäin paikkavektori lausuttava painopisteen suhteen (ts. olisi käytettävä etäisyyksiä r_a ja r_b eikä suuretta r)

Radiaalikomponentti:
$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad \Big| \ \text{sij. } \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$
$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

suorittamalla muuttujanvaihto $y = \frac{1}{r}$
$$\Rightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{y} \\ \dot{r} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{y^2}\dot{\theta}\frac{dy}{d\theta} = -h\frac{dy}{d\theta} \\ \text{Huom. } \frac{d}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta} \\ \ddot{r} = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{d\theta}\right) = -h\dot{\theta}\frac{d^2y}{d\theta^2} \end{cases}$$

saadaan $$-h^2y^2\frac{d^2y}{d\theta^2} - h^2y^3 = -GMy^2 \quad \Big| : (-h^2y^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} + y = \frac{MG}{h^2}$$

Ratkaisu $y = B\cos(\theta - \theta_0) + \frac{MG}{h^2}$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\Rightarrow r = \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{MG}{h^2} + B\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{1}{\frac{MG}{h^2}\left[1 + \frac{Bh^2}{MG}\cos(\theta-\theta_0)\right]}$$

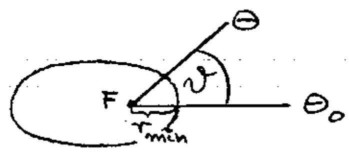
$$r = \frac{\frac{h^2}{MG}}{1 + \frac{Bh^2}{MG}\cos(\theta - \theta_0)}$$

Merkitään : $e = \frac{Bh^2}{MG}$

$p = \frac{h^2}{MG} = a(1-e^2)$

$\theta - \theta_0 = \vartheta$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}} \quad \text{KEPLER I}$$



Vakio B voidaan lausua kokonaisenergian ja pintanopeuden avulla:

Kun $\left.\begin{matrix}\theta = \theta_0 \\ r = r_{min}\end{matrix}\right\} \overset{K\,I}{\Longrightarrow} B = \frac{1}{r_{min}} - \frac{MG}{h^2}$

Kokonaisenergia yksikkömassaa kohti on $\quad \mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}$

Täten tarkastelukohdassa r_{min} on : $\quad \mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r_{min}}$

$$\mathcal{E} = \frac{h^2}{2r_{min}^2} - \frac{GM}{r_{min}}$$

Perisentrumissa $\bar{v} \perp \bar{r}_{min}$

$\Rightarrow v = r_{min}\dot{\theta}$ (tangentiaalinopeus)

$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{(r_{min}\dot{\theta})^2}{2} = \frac{h^2}{2r_{min}^2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{r_{min}}\right)^2 - \frac{2GM}{h^2}\left(\frac{1}{r_{min}}\right) - \frac{2\mathcal{E}}{h^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_{min}} = \frac{MG}{h^2} \pm \sqrt{\frac{M^2G^2}{h^4} + \frac{2\mathcal{E}}{h^2}}$$

Sijoittamalla tämä B:n lausekkeeseen saadaan

$$B = \frac{1}{r_{min}} - \frac{MG}{h^2}$$

$$B = \frac{MG}{h^2} \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{M^2G^2}{h^4} + \frac{2\mathcal{E}}{h^2}} - \frac{MG}{h^2}$$

Huom. valittava plusmerkki jotta kohdassa $r = r_{min}$ B on suurimmillaan

$$\underline{\underline{B = \sqrt{\frac{M^2G^2}{h^4} + \frac{2\mathcal{E}}{h^2}}}}$$

Keplerin III laki saadaan Keplerin II lain avulla:

$$h = 2\,\frac{dA}{dt} = \text{vakio}$$

$$h = 2\,\frac{A}{P} \quad , \text{ missä } P = \text{planeetan kiertoaika}$$

$$h = 2 \cdot \frac{\pi a b}{P} = 2 \cdot \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{P}$$

$$\Rightarrow P = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{h}$$

$$P = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{MGa}\sqrt{1-e^2}}$$

$$\text{KI} \Rightarrow p = \frac{h^2}{MG} = a(1-e^2)$$

$$h = \sqrt{MGa(1-e^2)}$$

$$\boxed{P^2 = \frac{4\pi^2}{MG}\,a^3} \qquad \text{KEPLER III}$$

Johdetaan vielä lopuksi kätevä yhtälö kappaleen ratanopeuden, paikkavektorin ja rataellipsin isoakselin välille.

Perisentrumissa ($r = r_{min}$) on

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r_{min}} = \frac{h^2}{2r_{min}^2} - \frac{GM}{r_{min}}$$

$$r_{min} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos 0^\circ} = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = \frac{h^2}{MG(1+e)}$$

$$= \frac{h^2}{2}\frac{M^2G^2(1+e)^2}{h^4} - \frac{M^2G^2(1+e)}{h^2}$$

$$= \frac{M^2G^2(1+e)\left[1+e-2\right]}{2h^2}$$

$$= \frac{M^2G^2(e^2-1)}{2h^2} \qquad \text{sij. } h^2 = MGa(1-e^2)$$

$$= \frac{MG(e^2-1)}{2a(1-e^2)}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r_{min}} = -\frac{MG}{2a}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = MG\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

L I I T E II

JOHDATUS ELEKTRONIEN SIIRTYMÄTODENNÄKÖISYYKSIEN KVANTTIMEKAANISIIN LASKUIHIN

Elektronin siirtymätodennäköisyys voidaan laskea seuraavilla lähtöoletuksilla:

1) Klassinen atomi ja klassinen sähkömagneettinen kenttä

   Elektroni kuvataan vaimenevana harmonisena värähtelijänä. Teoria tulostaa absorptiokertoimelle oikean dimension, mutta kvanttimekaaninen arvo voi heittää useita kertaluokkia.

2) Kvanttimekaaninen atomi ja klassinen sm-kenttä

   Laskut antavat oikean tuloksen todennäköisyyskertoimelle B_{ij} (absorptio) ja B_{ji} (indusoitu emissio). Sen sijaan A_{ji} (spontaani emissio) ei lainkaan esiinny tässä esityksessä.

3) Kvanttimekaaninen atomi ja kvantittunut sm-kenttä

   Laskut antavat oikeat arvot kaikille elektronien siirtymätodennäköisyyksille A_{ij}, B_{ij} ja B_{ji}.

Seuraavassa lasketaan johdatuksenomaisesti absorption todennäköisyyskerroin B_{ij} tarkastelemalla kvanttimekaanista atomia klassisessa sm-kentässä. Einsteinin todennäköisyyskertoimet A_{ji} (spontaani emissio) ja B_{ji} (indusoitu emissio) saadaan B_{ij}:n avulla seuraavilla relaatioilla:

$$A_{ji} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{ji}$$

$$g_i B_{ij} = g_j B_{ji}$$, missä g_i = energiatilan i statistinen paino

Kvanttimekaniikassa kuvataan atomia aaltofunktiolla $\Psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_N, t)$, missä $\bar{r}_i$ on atomin sidoselektronin paikkavektori. Atomin mielivaltainen tila hetkellä t = 0 voidaan esittää ominaisfunktioitten φ_n sarjakehitelmänä:

$$\Psi = \sum_n a_n \varphi_n$$

Ominaisfunktioihin φ_n liittyy fysikaalinen suure A siten, että kun $\Psi = \varphi_n$ niin suureella A on arvo α_n. Koska $|\Psi|^2$ esittää todennäköisyystiheyttä, ja ominaisfunktiot φ_n ovat ortogonaalisia ($\int \varphi_i^* \varphi_j \, d^n x \equiv (\varphi_i^* | \varphi_j) = \delta_{ij}$), on

$$\boxed{\int |\Psi|^2 \, d^n x = |a_n|^2} = \text{arvon } \alpha_n \text{ todennäköisyys tilassa } \Psi$$

Ajasta riippuvat ilmiöt kuvataan tilafunktiolla

$$\Psi(\bar{r},t) = \int \underbrace{\Psi(\bar{r}',0)}_{\text{alkutila}} \cdot \underbrace{K(\bar{r}', \bar{r}, t)}_{\text{propagaattori}} \, d^3 \bar{r}'$$

propagaattori = todennäköisyysamplitudi sille tapahtumalle, että hiukkanen on aluksi tilassa $\bar{r}'$ ja ajan t kuluttua tilassa $\bar{r}$.

Schrödingerin yhtälö on propagaattorin toinen esitysmuoto:

$$\hat{H}\Psi = \hat{E}\Psi \quad , \text{ missä } \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\bar{r}) = \text{Hamiltonin operaattori}$$

$$\hat{E} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$$

Ajasta riippuvissa ilmiöissä $\Psi = \sum_n a_n(t) \Psi_n(t)$ ja $|a_n(t)|^2$ = arvon α_n todennäköisyys tilassa Ψ. Häiriintymättömässä tilassa atomin tilafunktion kertoimet a_n eivät riipu ajasta. Jos sen sijaan atomia häiritään jollain potentiaalilla V, muuttuvat kertoimet a_n yleensä ajan mukana. Tämä voidaan tulkita siten, että atomi siirtyy tilalta toiselle. Esimerkiksi ulkoinen sähkökenttä häiritsee atomia. Ensimmäisessä approksimaatiossa voidaan ulkoinen kenttä kuvata lausekkeella $\bar{E} = E_o \cos \omega t \bar{i}$, jolloin elektronin potentiaali tässä kentässä on

$$V = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{e\bar{E}}_{\bar{F}} \cdot \bar{r}_i = E_0 \cos\omega t \; \bar{i} \cdot \bar{p}$$, missä $\bar{p} = e \sum_{i=1}^{N} \bar{r}_i$ = dipolimomentti

Schrödingerin yhtälö:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\Psi = \sum_n a_n(t)\, \Psi_n(t)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum \dot{a}_n \Psi_n + \sum a_n \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\cancel{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \sum a_n \Psi_n} + V \sum a_n \Psi_n = i\hbar \sum \dot{a}_n \Psi_n + \cancel{i\hbar \sum a_n \frac{\partial \Psi}{\partial t}}$$

Yhtälön ääritermit ovat yhtäsuuret, koska Schrödingerin yhtälö ilman häiriöpotentiaalia on

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

Ratkaisuyritteellä $\Psi = u(r)\cdot v(t)$ voidaan muuttujat separoida, joten ne eivät riipu toisistaan.

$\Longrightarrow$ yhtälön kumpikin puoli on vakio = E

$\Longrightarrow$ ratkaisu: $\Psi(t) = \Psi(0)\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

$$\Rightarrow i\hbar \sum_n \dot{a}_n \Psi_n(t) = \sum a_n(t)\, V\, \Psi_n(t)$$

Käyttämällä hyväksi ominaisfunktioitten ortogonaalisuutta voidaan tietty $\dot{a}_m$ erottaa yo. sarsarjasta. Yhtälö kerrotaan tämän vuoksi puolittain funktiolla Ψ^* ja integroidaan kaikkien koordinaattialkioitten yli.

$$\Rightarrow i\hbar \sum_n \dot{a}_n e^{i\frac{E_m - E_n}{\hbar}t} \underbrace{(\varphi_m^* | \varphi_n)}_{\delta_{mn} = 1,\ \text{kun } m=n} = \sum_n a_n e^{i\frac{E_m - E_n}{\hbar}t} (\varphi_m^* | V | \varphi_n)$$

$$\Rightarrow \dot{a}_m(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_n a_n(t)\, e^{i\frac{E_m - E_n}{\hbar}t} (\varphi_m^* | V | \varphi_m)$$

Merkitään :

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$$

$$V_{mn} = (\varphi_m^* | V | \varphi_n) = E_0 \cos\omega t\; \bar{i}\, (\varphi_m^* | \bar{p} | \varphi_n)$$

$$= E_0 \cos\omega t\; \bar{i} \cdot \bar{p}_{mn} \quad \Big| \quad \cos\omega t = \tfrac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$= \frac{E_0}{2}\, \bar{i} \cdot \underbrace{\bar{p}_{mn}}_{} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

dipolimomentin matriisielementit

$$\Rightarrow \dot{a}_m(t) = \frac{E_o}{2i\hbar} \sum a_n(t)\, \bar{i}\cdot\bar{p}_{mn}\, e^{i\omega_{mn}} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

Oletukset:

Kun $t = 0$, niin $a_k(0) = 1$

$a_n(0) = 0,\ n \neq k$

eli atomi on alkuhetkellä määrätyssä stationaarisessa tilassaan k

Kun $t < T$, niin $a_k(t) \approx 1$

eli aikaintervalli niin lyhyt, ettei tilan populaatio ehdi juuri muuttua

$\Rightarrow$ yhtälön summa voidaan korvata yhdellä termillä

$$\dot{a}_m(t) = \frac{E_o}{2i\hbar}\, \bar{i}\cdot\bar{p}_{mk}\, e^{i\omega_{mk}t} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \qquad \Big|\ \int \dots dt$$

$$a_m(t) = \frac{E_o}{2i\hbar}\, \bar{i}\cdot\bar{p}_{mk} \left[\frac{e^{i(\omega_{mk}-\omega)t} - 1}{\omega_{mk} - \omega} + \frac{e^{i(\omega_{mk}+\omega)t} - 1}{\omega_{mk} + \omega} \right]$$

Absorptiossa $E_m > E_k$, jolloin $\omega_{mk} > 0$. Koska absorptio on suurimmillaan, kun $\omega \approx \omega_{mk}$, voidaan sulkulausekkeen toinen termi jättää huomiotta. Merkitsemällä $x = \omega - \omega_{mk}$ saadaan siirtymän todennäköisyyskertoimiksi

$$|a_m(t)|^2 = \frac{E_o^2 |\bar{i}\cdot\bar{p}_{mk}|^2}{4\hbar^2} \frac{4\sin^2\frac{xt}{2}}{x^2}$$

säteilytiheys $u = \frac{1}{c}\int I\, d\omega = \frac{4\pi}{c}\gamma$

Toisaalta, koska $\theta = 0°$, on $\mathcal{F} = \int I \underbrace{\cos\theta}_{=1} d\omega$

$$\Rightarrow u = \frac{\langle \mathcal{F} \rangle}{c} = \frac{E_o^2}{8\pi} = \frac{4\pi}{c}\gamma$$

$$\Rightarrow E_o^2 = \frac{32\pi^2}{c}\gamma$$

$$|a_m(t)|^2 = \frac{8\pi^2 \gamma |\bar{i}\cdot p_{mk}|^2}{c\,\hbar^2} \frac{4\sin^2\frac{xt}{2}}{x^2} \qquad \Big|\ \int_{-x}^{x} \dots dx$$

integroidaan yli absorptioviivan taajuuskaistan.

Jos $xt \gg 1$, niin integroimisrajat voidaan muodollisesti ulottaa äärettömyyteen. (Huom. tyypillisesti $\omega \sim 10^{15}$ 1/s ja elektronisiirtymän kesto $t \sim 10^{-8}$ 1/s)

$$\Rightarrow \; |a_m(t)|^2 = \frac{8\pi^2 J_\omega}{c\hbar^2} \left|\bar{i}\cdot\bar{p}_{mk}\right|^2 \cdot 2t \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{xt}{2}\right) d\left(\frac{xt}{2}\right)}{\left(\frac{xt}{2}\right)^2}}_{\pi} \qquad \begin{array}{|l} J_\nu d\nu = J_\omega d\omega \\ J_\nu = 2\pi J_\omega \end{array}$$

$$\Rightarrow \; |a_m(t)|^2 = \frac{8\pi^2 J_\nu}{c\hbar^2} \left|\bar{i}\cdot\bar{p}_{mk}\right|^2 \cdot t$$

Elektronin siirtymisnopeuden (transition rate) R_{mk} määritelmä:

$$R_{mk} = \frac{\text{todennäköisyys, että siirtymä on tapahtunut}}{\text{aikayksikkö}}$$

$$R_{mk} = \frac{|a_m(t)|^2}{t} = \frac{8\pi^2 J_\nu}{c\hbar^2} \left|\bar{i}\cdot\bar{p}_{mk}\right|^2$$

Einstein esitti v. 1917 siirtymisnopeuden absorptiossa muodossa

$$N_i(\nu) R_{ij} \frac{d\omega}{4\pi} = N_i(\nu) B_{ij} I_\nu \frac{d\omega}{4\pi},$$

missä $N_i(\nu)$ = niitten energiatilassa i olevien atomien lkm/cm^3, jotka absorboivat säteilyä taajuusvälillä $(\nu, \nu + d\nu)$

N_i = energiatilassa i olevien atomien kokonaislukumäärä/cm^3

B_{ij} = Einsteinin kerroin (atomaar. vakio)

Naapuriatomien häiritsevän vaikutuksen johdosta ja atomin ylemmän energiatilan äärellisen eliniän vuoksi spektriviiva ei ole terävä, vaan se leviää yli tietyn taajuusvälin. Absorptioviivan profiili φ_ν on normalisoitu siten, että

$$\int_0^\infty \varphi_\nu d\nu = 1$$

Koska $N_i(\nu) = N_i \varphi_\nu$, on Einsteinin yhtälön perusteella

$$R_{mk} = B_{mk} \int_0^\infty I_\nu \varphi_\nu d\nu = B_{mk} J_\nu \underbrace{\int_0^\infty \varphi_\nu d\nu}_{=1}$$

Olet. J_ν = vakio yli viivan

$$\Rightarrow \; \boxed{B_{mk} = \frac{R_{mk}}{J_\nu}} = \frac{8\pi^2}{c\hbar^2} \left|\bar{i}\cdot\bar{p}_{mk}\right|^2$$

Tarkasteltaessa suurta atomijoukkoa, on

$$\overline{\left|\bar{i}\cdot\bar{p}_{mk}\right|^2} = p_{mk}^2 \, \overline{\cos^2\theta} = \frac{1}{3} p_{mk}^2$$

$$\Rightarrow \; B_{mk} = \frac{8\pi^2 p_{mk}^2}{3c\hbar^2}$$

$$\boxed{B_{mk} = \frac{32\pi^4 e^2 r_{mk}^2}{3ch^2}}$$

EINSTEININ TODENNÄKÖISYYSKERROIN ABSORPTIOSSA

missä $r_{mk}^2 = \left| \left(m \left| \sum_{i=1}^{N} \bar{r}_i \right| k \right) \right|^2$

Indusoituneen emission tapauksessa

$g_i B_{ij} = g_j B_{ji}$, missä B_{ij} = absorption Einsteinin kerroin
B_{ji} = indusoituneen emission Einsteinin kerroin
g_i = energiatilan i statistinen paino

$$B_{ji} = \frac{g_i}{g_j} B_{ij}$$

$$\boxed{B_{ji} = \frac{g_i}{g_j} \frac{32\pi^4 (e r_{ij})^2}{3ch^2}}$$

EINSTEININ TODENNÄKÖISYYSKERROIN INDUSOITUNEESSA EMISSIOSSA

Spontaanin emission tapauksessa

$$A_{ji} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{ji}$$

$$\boxed{A_{ji} = \frac{g_i}{g_j} \frac{64\pi^4 \nu^3 (e r_{ij})^2}{3hc^3}}$$

EINSTEININ TODENNÄKÖISYYSKERROIN SPONTAANISSA EMISSIOSSA

HUOM.1 Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että atomin energiatasot eivät ole degeneroituneita, jolloin $g_i = g_j = 1$. Spontaaneja siirtymiä tarkasteltaessa on tällöin atomin emi~~i~~ttoima säteilyteho

$$P_{ji} = A_{ji} h\nu_{ji} = \frac{64\pi^4 e^2 \nu^4}{3c^3} r_{ij}^2 = \frac{e^2 \omega^4 (2 r_{ij})^2}{3c^3}$$

Tämä vastaa klassisen oskillaattorin keskimääräistä säteilytehoa, kun dipolin varausten suurin etäisyys on 2 r_{ij}.

HUOM. 2 Elektronisiirtymien Einsteinin kertoimien avulla päästään siirtymän oskillaattorivoimakkuuteen seuraavasti.
Kun huomioidaan energiatilojen degeneroituminen (jakautuminen), on atomin säteilyteho spontaanissa emissiossa (siirtymä $j \rightarrow i$) :

$$P_{ji} = g_j A_{ji} h\nu_{ji} = \frac{64\pi^4\nu^4}{3c^3} \sum_{i,j} p_{ij}^2$$

summa otettu yli alemman ja ylemmän energiatason degeneroituneitten tilojen

$$\Rightarrow \quad g_j A_{ji} = \frac{64\pi^4\nu^3}{3hc^3} \sum_{i,j} p_{ij}^2$$

Toisaalta: $g_j A_{ji} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{ji} g_j$

$$\Rightarrow B_{ji} = \frac{32\pi^4}{3h^2c} \frac{\sum p_{ij}^2}{g_j}$$

Absorption todennäköisyyskerroin degeneraation tapauksessa on täten

$$B_{ij} = \frac{g_j}{g_i} B_{ji} = \frac{32\pi^4}{3h^2c} \frac{\sum p_{ij}^2}{g_i}$$

Luvussa 2.5.2e todettiin, että 1 cm^3:iin väliainetta absorboituu säteilytehoa

$P_\nu = 4\pi I_\nu \varrho \bar{k}$, missä $\varrho\bar{k} = N_{o\nu} \frac{\pi e^2}{mc} \cdot f$

f = oskillaattorivoimakkuus

$$\Rightarrow \quad N_{o\nu} \frac{\pi e^2}{mc} f_{ij} = N_{o\nu} \cdot \frac{1}{4\pi} B_{ij} h\nu \qquad \Big| \text{ Sij. } B_{ij} = \frac{32\pi^4}{3h^2c} \frac{\sum p_{ij}^2}{g_i}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_{ij} = \frac{8\pi^2 m\nu}{3hc^2} \frac{\sum p_{ij}^2}{g_i}}$$

SIIRTYMÄN ij OSKILLAATTORIVOIMAKKUUS

Päätasojen n' ja n välinen kokonaisoskillaattorivoimakkuus voidaan ilmoittaa degeneroituneitten tilojen oskillaattorivoimakkuuksien summana seuraavasti:

$$f(n',n) = \frac{1}{g_{n'}} \sum_{l'} g_{n'l'} f(n',l';n,l)$$

$$\boxed{f(n',n) = \frac{\sum_{l'} g_{n'l'} f(n',l';n,l)}{\sum_{l'} g_{n'l'}}}$$