

# Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016

## Todennäköisyyslaskenta II, syksy 2016

**Vastuuopettaja:** [Petteri Piironen](#)

**Laajuus:** 10 op

**Tyyppi:** Aineopintoja

**Opetus:** luennot ja laskuharjoitukset

**Sisältö:** Käsitteet ja tekniikat, joita jokainen tilastotieteilijä tai muu todennäköisyyslaskennan soveltaja tarvitsee. Tavoitteena on oppia laskemaan käsitteiden avulla, Keskeistä sisältöä: todennäköisyys ja ehdollinen todennäköisyys sekä näiden perusuominaisuudet, satunnaismuuttuja sekä sen jakauma, satunnaismuuttujan ja sen muunnoksen odotusarvo, yksiulotteisten jakaumien kvantiilit sekä niiden tavanomaiset tunnusluvut. Sovelluksissa usein esiintyvät yksiulotteiset jakaumat, diskreetin jakauman käsittely pistetodennäköisyysfunktion avulla (sekä yksi- että moniulotteisissa tapauksissa), jatkuvan jakauman käsittely tiheysfunktion avulla (sekä yksi- että moniulotteisissa tapauksissa), muuttujanvaihtokaava tiheysfunktiolle (sekä yksi- että moniulotteisessa tapauksessa), moniulotteisen jakauman odotusarvo sekä kovarianssimatriisi, ehdollinen jakauma sekä ehdollinen odotusarvo, kaksiulotteisen jakauman hierarkkinen määrittely reunajakauman sekä ehdollisen jakauman avulla, moniulotteinen normaalijakauma, suurten lukujen laki, keskeinen raja-arvolause sekä eräät näihin tuloksiin perustuvat approksimaatiot.

**Esitietovaatimukset:** seuraavien kurssien tiedoista on paljon hyötyä, mutta niistä tarvittavat asiat kerrataan kurssilla joka tapauksessa

- *57045 Todennäköisyyslaskenta I*, jossa annetaan perustiedot todennäköisyyslaskennasta pääasiassa tapahtumien ja yksiulotteisten jakaumien näkökulmasta
- *57121 Vektorianalyysi I* ja *57122 Vektorianalyysi II* (ja niitä edeltävät matematiikan kurssit)

- [Ajankohtaista](#)  
[Sähköiset työalueet](#)
  - [Presemon keskustelua](#)

- [Opetusajat](#)  
[Kokeet](#)
  - [Lisätietoja toisesta kurssikokeesta](#)
  - [Vanhoja kokeita ja ratkaisuehdotuksia niihin](#)
  - [Lisätietoja ensimmäisestä kurssikokeesta](#)
- [Pisteytys](#)

- [Kurssimateriaali](#)
  - [Luentokalvot](#)
    - [Muuta luennoilla käytettyä materiaalia](#)
    - [Esimerkkejä ja esimerkkilaskuja](#)
  - [Opetusmoniste](#)
  - [Luentopäiväkirja](#)
    - [Periodi I \(5.9.-23.10\)](#)
    - [Viikko 43 \(koeviikko\)](#)
    - [Periodi II \(31.10.-18.12\)](#)
    - [Viikko 51 \(koeviikko\)](#)

- [Ilmoittaudu kurssille](#)  
[Laskuharjoitukset](#)
  - [Harjoitustehtävät](#)
  - [Ratkaisuehdotukset](#)
  - [Harjoitusryhmät](#)

[Palautetta kurssista](#)

## Ajankohtaista

- Hei! Korvaavan 2. kurssikokeen 1.2.2017 arvostelu on nyt sivulla [Koetulokset](#). Tulokset ovat liitetty osaksi aikaisempia tuloksia ja jos olen vahingossa muuttanut jonkun sellaisen osallistujan tiedot, joka ei korvaavaan osallistunut, niin ei huolta 😊 arvostelu pysyy silti ennallaan. Erilliskokeen tarkistus on vielä kesken, mutta valmistuu piakkoin.
- **Hei!** Keskiviikkona 1.2.2017 on sekä kurssin erilliskoe (5 tehtävää, koko kurssin alue / 3,5 h) ja korvaava 2. kurssikoe (4 tehtävää, II periodin alue / 2,5h). Varmistathan että otat oikean koepaperin. **Lisäys:** kokeet alkavat klo 16 ja ne järjestetään Exactumin auditorioissa / saleissa. Tarkka sali selviää keskiviikkona paikan päällä.

- Erilliskokeessa on sallittu apuväline on **laskin**. Korvaavassa kokeessa sallitut apuvälineet ovat *samat kuin erilliskokeessa* (ja samoin säädöksiin kuin erilliskokeista) johtuen käytännön rajoitteista. Eli myös korvaavissa kurssikokeissa **ainoa** sallittu apuväline on laskin.
- Kurssikokeen ja erilliskokeen tehtäväpaperin ohessa on kuitenkin minun (Petteri) laatima käsinkirjoitettu luntti, joka toivottavasti hieman tasoittaa tätä puutetta. Valitettavasti itselaadittua lunttia ei toisen laatima voi mitenkään täysin korvata, mutta yritän parhaani mukaan laatia sopivan luntin.
  - **Erilliskokeen luntti**
  - **Korvaavan kurssikokeen luntti**
- **Hei!** Pahoittelen, että ratkaisuehdotuksen laittaminen hieman viivästy, mutta tässä (vielä ilman kuvia) on hieman keskeneräinen **ratkaisuehdotus**. Tästä on varmasti hieman apua korvaavaan 2. kurssikokeeseen sekä erilliskokeeseen 1.2.2017. *Kuvakin on nyt lisätty.*
- Toisen kurssikokeen pisteytys sekä kurssin arvostelutkin (niiden osalta, jotka osallistuivat molempiin kokeisiin) on sivulla **Koetulokset**. Laitan pikkujuljaa myös ratkaisuehdotukseni 2. kurssikokeeseen ja muistuttaisin, että jos haluat osallistua korvaavaan 2. kurssikokeeseen 1.2.2017, niin s-postia vain minulle (**Petteri**).
- **Hei!** Toisen kurssikokeen tarkistus on valmis ja tulosten valmistelu julkaistavaksi on parhaillaan menossa. Laitan tiedon tänne sekä presemoon (sinne myös tarkempia väliaikatietoja), kun tulokset ovat sivulla **Koetulokset**. **Järjestän myös korvaavan 2. kurssikokeen** (mutta korvaavan kurssikokeen ohjeistuksella) **helmikuussa 1.2.2017**, jos et päässyt kokeeseen tai mielestäsi paras kunto ei osunut joulukuussa. Ilmoittautumisia voi laittaa s-postilla minulle (**Petteri**).

**Ja lisäksi haluan sanoa: Hyvää joulua ja Hyvää tulevaa vuotta 2017.** Lämpimät kiitokseni vielä kaikille kurssin osallistujille!

- Hei! Lisäsin eilen laskuharjoitus-lisäpisteet **Koetulokset** -sivulle, mutta olin onnistunut mokaamaan muutaman lisäpistekopiointiin. Päivitin sen, mutta jos huomaatte omalla kohdallanne jotain epäilyttävää tai erikoista, niin laitathan s-postia minulle (**Petteri**).
- Lisään laskuharjoitus-lisäpisteet **Koetulokset** sivulle tänään. Onnea ja menestystä kokeeseen. Koska koe voi tuntua työläältä, kannattaa silti vastata kaikkiin kohtiin ja kertoa mitä olisi tehnyt jos aika riittäisi. Ja järjestys ei välttämättä ole helpoin ensin, vaikein sitten. Järjestän vielä korvaavan 2. kurssikokeen (mutta korvaavan kurssikokeen ohjeistuksella) ensi vuoden helmikuussa 1.2.2017, jos et päässyt kokeeseen tai mielestäsi paras kunto ei osunut tähän päivään. Ilmoittautumisia voi laittaa s-postilla minulle (**Petteri**).
- **Hei!** Lisäsin tietoa kurssikokeista (alla). Kannattaa erityisesti huomata, että kurssikokeen 20.12. ja korvaavien kurssikokeiden 14.12. ohjeistuksessa koskien *apuvälineitä* on käytännön syistä on eroma...
- Hei! tiistaina 6.12. ei järjestetä laskuharjoituksia. Tuolloin normaalisti laskuharjoituksiin osallistuvat voivat vierailta loppuviikon harjoituksissa tai laittaa vastauksensa sähköpostilla laskuharjoituksen pitäjälleen (etunimi piste sukunimi (at) helsinki piste fi).
- Hei! Pyytäisin niitä, jotka haluaisivat osallistua 2. kurssikokeen korvaavaan kokeeseen keskiviikkona 14.12. ja jotka eivät ole jo ilmoittautuneet, laittamaan s-postia minulle (**Petteri**) viimeistään **maanantaina 5.12 klo 12 mennessä**. Pyytäisin myös niitä, jotka tuntevat halukkuutta uusia 1. kurssikoke keskiviikkona 14.12. laittamaan tämän/ensi viikon aikana s-postia minulle (**Petteri**) halukkuudestaan **viimeistään maanantaina 5.12 klo 12 mennessä**. Ensisijaisesti uusintamahdollisuus on varattu niille, jotka eivät lainkaan päässeet 1. kurssikokeeseen sekä niille joiden "päivän kunto" ei osunut kohdalleen eli noin alakvartaaliin sijoittuneille. Laitan tietoa apuvälineistä myöhemmin.
- Hei! Kurssikokeen tulokset löytyvät nyt sivulta **Koetulokset**. Alla olevan ilmestymisajan T reaalisatatio T() oli siis n. 26,17.
- Hei! Ensimmäisen kurssikokeen tarkistus lähestyy valmistumistaan (tämän hetken tilanne n. 98 %). Laitan tiedon tänne sekä presemoon, kun tulokset ovat sivulla **Koetulokset**. Arvioni siitä, milloin tämä tapahtaa voidaan kuvata seuraavan satunnaismallin mukaisesti. Oletetaan, että T = "kurssikokeen tuloksen ilmestymisajankohta (tunneissa) kun nollahetki on ma 14.12. klo 9:30 paikallista aikaa" on jatkuvasti jakautunut sm. Kerron heti, että  $T > 0$  tn:llä 1, sm:llä T on äärellinen varianssi ja  $ET = 8$  sekä var  $T = 25$ .
  1. Kannattaa pohtia kysymyksiä: mitä voidaan sanoa seuraavista arvioista todennäköisyyksille  $P(T < 14,5)$  ?,  $P(T < 14+24)$  ?,  $P(T < 14 + 2 * 24)$  ? ja mitä nämä arvot kertovat? Voiko tämän tiedon avulla sanoa, että tn:llä 1 tulokset julkaistaan vielä tämän vuoden aikana 😊 ?
  2. jos lisäksi kerron, että T:llä on kaikki momentit olemassa, voiko silloin sanoa että tulokset julkaistaan tn:llä 1 tämän vuoden aikana 😊 ?
  3. jos vielä lisäksi kerron, että T:n momenttiemäfunktio  $M_T$  on äärellisenä olemassa kaikilla t, ja lisäksi kerron arvion  $M_T(t) = 3004 \exp(47t) / (t^3 + 2017)$ , joka on voimassa kaikilla  $t > 0$ , niin auttaako tämä tuon tn:llä 1 kysymyksen kanssa? 😊
- Hei! Järjestän sekä 1. että 2. kurssikokeen korvaavat kokeet keskiviikkona 14.12. laitostentin yhteydessä. Halukkaille pyrin tuolloin myös antamaan 1. kurssikokeen uusintamahdollisuuden, mutta ilmoittautumisia voitte laittaa s-postilla vasta kun olen saanut kurssikokeen 28.10. arvosteltua (tarkistustilanne tällä hetkellä n. 37%).
- Hei! Korvaavasta kokeesta myös 1. kurssikokeen kohdalta on tullut sairastumisten takia kysymyksiä. Näillä näkymin järjestän sekä 1. että 2. kurssikokeen korvaavat kokeet keskiviikkona 14.12. laitostentin yhteydessä, sillä tämä on ainoa sopiva aika, mutta laitan tarkemmin tietoa ja vahvistuksen näille ensi viikolla. Tähän mennessä 2. kurssikokeen korvaavaan kurssikokeeseen ilmoittautuneista kaikille kävi 14.12. mutta usealle ei 11.1. käynyt. Katsotaan myös uusintakysymysten tilannetta (ja tarvetta) marraskuun loppupuolella.
- Moni on kysellyt **2. periodin laskuharjoitusten** alkamisajankohtaa. Seitsemännet harjoitukset laitan kurssisivulle tiistaina 1.11. ja ne käsitellään laskuharjoituksissa tiistai 8.11. - perjantai 11.11.
- Moni on kysellyt **toisen kurssikokeen** korvaavasta ylimääräisestä kurssikokeesta, koska osalle on mahdotonta osallistua kurssikokeeseen tiistaina **20.12**. Korvaavan kokeen voi järjestää joko **14.12.** tai **11.11.** laitostentin yhteydessä (kts. tarkka aika **tenttisivulta**). Laitathan minulle (**Petteri**) s-postia, sopivatko nuo päivät ja kumpi sopisi paremmin, jotta voin valita parhaiten sopivan ajan noista vaihtoehdoista. **Huom!** Tämä ei ole tarkoitettu uusintamahdollisuudeksi vaan ylimääräinen kurssikoe on tarkoitettu niille, jotka eivät pysty osallistumaan 20.12. toiseen kurssikokeeseen. Myöskään tähän ylimääräiseen kokeeseen ei ilmoitauduta oodin kautta vaan s-postilla minulle.
- **Hei. Jos haluat tehdä kurssikokeen ruotsiksi ja haluat tehtäväpaperin myös ruotsiksi, laita minulle (Petteri) s-postia viimeistään keskiviikon 19.10. luentoihin mennessä. Varaudun noin 10 ruotsinkieliseen kokeeseen joka tapauksessa.**
- Hei. Yritän pikkujuljaa lisäksi kurssisivulle esimerkkejä sekä esimerkkilaskuja, jotka vaihtelevat helpoista vähemmän ilmeisiin. Tämä auttaneen varsinkin, jos luennoilla esimerkit ovat jääneet vähäisiksi. Pyrin lisäämään myös luennoilla käydyt esimerkit kurssisivulle. Lisää esimerkkejä voi toivoa vaikka presemon kautta.
- Hei. Maanantaina 5.9. on yliopiston avajaispäivä, joten luennot maanantaina 5.9 järjestetään klo 10.15 alkaen lyhennettyinä, jotta kaikki halukkaat ennättävät keskustan avajaistapahtumiin, jotka alkavat klo 12.
- Hei. Päivitin sivuja "koko" ajan, joten kannattaa käydä katsomassa jos muutoksia on tullut.

## Sähköiset työalueet

Kurssilla on käytössä presemoalue. Kurssin presemoalue löytyy osoitteesta

<http://premo.helsinki.fi/ppluento>

Presemossa voi esittää anonyymisti lyhyitä kysymyksiä ja kommentteja. Seuraan presemossa käytävää keskustelua myös luentojen aikana. Luennoilla käytävä keskustelu on tärkeä osa kurssin opiskelua ja presemo tarjoaa siihen anonyymien lisämahdollisuuden.

## Presemon keskustelua

Presemon keskustelu häviää pikkuhiljaa näkyvistä alkupäästä. Seuraavassa on keskustelu tähän saakka ryhmiteltyä (kutakuinkin, pieniä virheitä kopioiduissa voi aina olla 😊) harjoitusten mukaan ja aikajärjestyksessä (vanhin kommentti ensin, uusin viimeisenä). Päivitä näitä pikkuhiljaa keskustelun edetessä.

- [Presemo-keskustelua Yleisistä asioista](#) (lisätty: 17.10.2016, päivitetty: 28.10.2016)
- [Presemo-keskustelua Harjoituksesta 1](#) (lisätty: 17.10.2016)
- [Presemo-keskustelua Harjoituksesta 2](#) (lisätty: 17.10.2016)
- [Presemo-keskustelua Harjoituksesta 3](#) (lisätty: 17.10.2016)
- [Presemo-keskustelua Harjoituksesta 4](#) (lisätty: 17.10.2016)
- [Presemo-keskustelua Harjoituksesta 5](#) (lisätty: 17.10.2016)
- [Presemo-keskustelua Harjoituksesta 6](#) (lisätty: 17.10.2016, päivitetty: 28.10.2016)
- [Presemo-keskustelua Kertaustehtävistä ja 1. kurssikokeesta](#) (lisätään myöhemmin)
- [Presemo-keskustelua Harjoituksesta 7](#) (lisätty: 7.11.2016, päivitetään myöhemmin)
- [Presemo-keskustelua Harjoituksesta 8](#) (lisätty: 19.11.2016)
- [Presemo-keskustelua Harjoituksesta 9](#) (lisätty: 17.12.2016)
- [Presemo-keskustelua Harjoituksesta 10](#) (lisätty: 17.12.2016)
- [Presemo-keskustelua Harjoituksesta 11](#) (lisätty: 17.12.2016)
- [Presemo-keskustelua Harjoituksesta 12](#) (lisätty: 17.12.2016)

## Opetusajat

Luennot viikoilla 36-42 ja 44-50 ma klo 10-12 ja ke klo 12-14 auditoriossa CK112. Lisäksi laskuharjoituksia 2 viikkotuntia.

## Kokeet

- 1. kurssikoe pe 28.10. klo 12.15-14.45 Exactumin auditorioissa A111 ja B123
- 2. kurssikoe ti 20.12. klo 11.15-13.45 Exactumin auditorioissa A111 ja B123
- Lisäksi korvaava 1. kurssikoe sekä korvaava 2. kurssikoe järjestetään ke 14.12. klo 16.15-18.45 Exactumin auditorioissa

Kurssikokeen kesto on 2,5 h. Erilliskokeista poiketen näissä kurssikokeissa on seuraavat sallitut apuvälineet:

- kurssikokeessa sallitut apuvälineet ovat 1) laskin sekä 2) lunttilappu. Lunttilappu pitää olla itse laadittu ja *käsinkirjoitettu* (eli ei tietokoneella tulostettu), eikä sillä ole muita rajoituksia kuin sen koko: yksi A4-kokoinen arkki (molemmat puolet saa käyttää). **HUOM! Tämä koskee varsinaisia kurssikokeita (eli 2. kurssikoetta ti 20.12.)**
- **Ja seuraava valittava tieto: korvaavassa kurssikokeessa (eli tämä koskee sekä 1. että 2. korvaavaa kurssikoetta ke 14.12.)** sallittut apuvälineet ovat *samat kuin erilliskokeessa* (ja samoin säädöksiin kuin erilliskokeista) johtuen käytännön rajoitteista. Eli korvaavissa kurssikokeissa **ainoa** sallittu apuväline on laskin. Kurssikokeen tehtäväpaperin ohessa on kuitenkin minun (Petteri) laatima käsinkirjoitettu luntti, joka toivottavasti hieman tasoittaa tätä puutetta. Valitettavasti itselaadittua lunttia ei toisen laatima voi mitenkään täysin korvata, mutta yritän parhaani mukaan laatia sopivan luntin. (**Korvaavan 1. kurssikokeen luntti**) (**Korvaavan 2. kurssikokeen luntti**)

## Lisätietoja toisesta kurssikokeesta

- Toinen kurssikoe on ti 20.12. klo 11.15-13.45 (jossakin auditorioista). Korvaava kurssikoe järjestetään myös ke 14.12 klo 16.15-18.45 (jossakin auditoriossa)
- Toisessa kurssikokeessa ti 20.12. sallitut apuvälineet ovat 1) laskin ja 2) lunttilappu. (MAOL-taulukoita ei sallita.) Lunttilappu pitää olla itse laadittu ja *käsinkirjoitettu* (eli ei tietokoneella tulostettu), eikä sillä ole muita rajoituksia kuin sen koko: yksi A4-kokoinen arkki (molemmat puolet saa käyttää).
- Korvaavassa 2. kurssikokeessa ke 14.12. sallittu apuväline on laskin. Tässä kokeessa ei voi käyttää itse laadittua lunttilappua, joten valitettavasti korvaavassa kokeessa joutuu tyytymään minun (Petteri) tehtäväpaperin ohkeen laatimaan **lunttiin**.
- Koealue:
  - monisteen luvut 6-10 (sekä luvusta 11 voin pyytää muotoilemaan suurten lukujen lain (heikko tai vahva) tai keskeisen raja-arvolauseen (1-ulotteinen)).
  - kalvot luvuista 6-10 sisältävät täsmennyksiä (ja pari korjaustakin) joten niihinkin kannattaa perehtyä, vaikka asia löytyykin monisteesta
  - Harjoitukset 7-12 (myös kertaustehtäviä kannattaa katsoa)
- Kokeessa **ei kysytä** seuraavia asioita:
  - monisteen kaavaa 9.16
  - moniulotteisen jakauman (yhteis-)momenttien laskeminen momenttienmäfunktion avulla (asia selostetaan jaksossa 9.7)
  - jaksoja 6.5, 10.5., 11.5. ja 11.6
  - todistuksia, joita ei ole kirjoitettu kalvoille
  - ...
- Muuta lisätietoa kokeeseen valmistautumisessa:
  - Opettele seuraavat jakaumat:
    - tasajakauma tasoalueessa (tf)
    - Moniulotteinen normaalijakauma (määrittely kaavalla  $X = + A U$ , jossa U:lla moniulotteinen standardinormaalijakauma ja  $A$  ja  $A$  ovat vakiovektori ja vakiomatriisi, eli on syytä tuntea milloin tf on olemassa, milloin ei, mikä on MEF ja mitä ominaisuuksia multinormaalijakaumalla on)
    - **HUOM!** myös *samat 1-ulotteiset jakaumat kuin ensimmäisessä kurssikokeessa (Bernoulli-jakauma, binomijakauma, geometrinen jakauma, Poissonin jakauma, eksponenttijakauma, tasajakauma, normaalijakauma)*
  - Seuraavat aiheet ovat esiintyneet usein toisessa kurssikokeessa
    - kaksikulotteisen jakauman ominaisuuksien selvittäminen, kun sen tiheysfunktio (tai ptnf) annetaan (ehkä vakiota vaille)
    - tiheysfunktion muuntokaava (jacobiaani) käytännössä **kaksikulotteisessa** tapauksessa
    - odotusarvon laskukaavat satunnaisvektorille ja -matriisille
    - odotusarvojen laskeminen käyttämällä 2-ulotteista TTL:ää, kun ytf (tai ptnf) on annettu tai johdettu aiemmin

- epäyhtälön (Markovin, Tsebysevin tai Jensenin epäyhtälön) soveltaminen helpossa tilanteessa, joten varmista että tiedät, mitä tarkoittaa konvekksi funktio
  - yhteisjakauman käsittely kertolaskukaavan avulla
  - hierarkiset mallit (katso esimerkkejä kappaleesta 8.5)
  - ehdollistaminen (esim. odotusarvon laskeminen iteroituna odotusarvona, ehdollisen odotusarvon, ehdollisen varianssin laskeminen, käsitteet, ...) esimerkiksi liittyen edelliseen
  - moniulotteinen normaalijakauma ja sen erityiset ominaisuudet (korreloimattomuus => riippumattomuus, kun yhteisjakauma multinormaalijakauma, säilyy affineissa muunnoksissa, ...) jne.
  - eri käsitteiden määritelmät
  - lauseiden muotoilu (ja joidenkin esim. kovarianssimatriisin ominaisuuksien osoittamista kuten lauseessa 9.2)
  - ...
- Jos törmäät laskussa hankalaan kohtaan ja joudut aikapulaan, niin selosta koepaperissa, millä strategialla olet laskua laskemassa. Hyvästä strategiasta voi saada suuren osan jaossa olevista pisteistä.
  - kysymyksiä voi (ja kannattaa tehdä) presemon kautta. Pidempiäkin vastauksia voin antaa (mitkä kirjoitan käsin (tai LaTeXilla), laitan tänne linkin ja kerron siitä presemonsa)

## Vanhoja kokeita ja ratkaisuehdotuksia niihin

- Viime syksyn 2. kurssikoe 18.12.2015 ja ratkaisuehdotukset
- Erilliskoe 15.6.2016
- ... lisään tähän linkkejä vanhempiin erilliskokeisiin (sillä suurin osa käsittelee 2. periodin asioita), mutta ilman ratkaisuehdotuksia

## Lisätietoja ensimmäisestä kurssikokeesta

- [Ratkaisuehdotuksia](#) (lue: tämä ei ole malliratkaisu) 1. kurssikokeeseen (28.10.2016). Jos huomaatte niissä jotain outoa, niin presemon voi laittaa niistä kysymyksiä. Tarkastus on vasta aluillaan, joten aikaa menee vielä aika tovi. Päivitan tilannetietoja tänne.
- Ensimmäinen kurssikoe on pe 28.10. klo 12.15-14.45 (jossakin auditorioista)
- Ensimmäisessä kurssikokeessa sallitut apuvälineet ovat 1) laskin sekä 2) lunttilappu. (MAOL-taulukoita ei sallita.) Lunttilapun pitää olla itse laadittu ja *käsinkirjoitettu* (eli ei tietokoneella tulostettu), eikä sillä ole muita rajoituksia kuin sen koko: yksi A4-kokoinen arkki (molemmat puolet saa käyttää).
- Koealue: monisteen luvut 1-5. Harjoitukset 1-6. Kertaustehtäviäkin kannattaa laskea, sillä ne sisältävät vanhoja kurssikoe-kysymyksiäkin (kysymys T2/2011 (kertaustehtävä 21), T2/2015 (lähes) (kertaustehtävä 5, ainoa ero kysymykseen T2/2015:ssä  $Y \sim U(0,1)$ ), T3/2015 (kertaustehtävä 23) ja T4/2015 (kertaustehtävä 24). Niiden ratkaisuehdotuksiin kannattaa myös perehtyä, mutta huom. *kaikki* ratkaisutavat käyvät. Ei ole *yhtä* malliratkaisua.
- Arvostelusta: käytän arvionnissa peruseriaatetta "palkitse onnistumisista". Tämä tarkoittaa käytännössä, että vaikka tehtävän ns. lopputulos olisi näennäisesti varsin "etäällä" optimisuorituksen lopputuloksesta, voi pisteitä tulla silti paljon. Vastaavasti vaikka lopputulos olisikin oikea, niin onnistumisia voi olla vähänkin (esim. laskin antaa suoraan vastauksen). Eli: kerro aina mitä olet tekemässä 😊 tämä kannattaa vaikka tehtävää et osaisikaan loppuun asti.
- Arvostelusta: tämä tosin hidastaa arvostelua, joten aikaa menee muutama viikko arvosteluun.
- Kokeessa **ei kysytä** seuraavia asioita:
  - Jakson 2.9 loppu (alaotsikosta Täydentäviä huomautuksia lähtien):  $k_f$ :n yleistetty käänteisfunktio; jakauman kvantiilin määrittely yleisessä tapauksessa. Siihen kohtaan asti jakso 2.9 sisältö on kurssin keskeistä sisältöä.
  - Lause 2.13 jaksossa 2.10.
  - Jakso 4.8 (karakteristinen funktio).
  - Jakson 4.7 kalvojen log-normaaliesimerkki (ja yleensäkin täydentävät huomautukset)
  - Jakso 5.1.4: negatiivisen binomijakauman ominaisuuksien selvittäminen binomisarjan avulla
  - Jakso 5.2: beetafunktion esittäminen gammafunktion avulla.
  - Lauseitten todistuksia eikä muutenkaan todistustehtäviä
  - mittaintegraaliin liittyviä keskusteluja
- Muuta lisätietoa kokeeseen valmistautumisessa:
  - Opettele seuraavat jakaumat niin, että osaat kirjoittaa niiden  $p_{tfn}$ :n tai  $f_{tfn}$ :n ja osaat johtaa sujuvasti niiden ominaisuuksia (kuten odotusarvon ja varianssin).
    - Bernoullin jakauma ja binomijakauma.
    - geometrinen jakauma
    - Poissonin jakauma
    - välin  $(a,b)$  tasajakauma
    - eksponenttijakauma
    - normaalijakauma
    - Myös muita jakaumia saattaa tehtävissä esiintyä, mutta silloin ne karakterisoidaan tehtävänannossa
  - Kannattaa kerrata harjoitustehtäviä ja kysyä, jos jokin kohta tehtävissä on jäänyt epäselväksi
  - Varmista että tiedät  $t_n$ :n peruslaskusäännöt ja ehdollisen  $t_n$ :n käsitteen ja osaat laskea niihin liittyviä tehtäviä
  - Varmista että tiedät  $p_{tfn}$ :n,  $f_{tfn}$ :n ja kvantiilifunktion käsitteet.
  - Varmista että tunnistat jatkuvan ja diskreetin jakauman  $k_f$ :stä ja osaat laskea muunnoksien jakaumia ( $p_{tfn}$ :iä,  $k_f$ :iä ja  $f_{tfn}$ :iä)
  - Varmista että tiedät odotusarvon ominaisuuksia (lause 4.3), osaat (ainakin periaatteessa) muunnoksen odotusarvon (lause 4.5)
  - Varmista että tiedät riippumattomuuden käsitteen ja osaat käyttää sitä apuna *tulon odotusarvon* laskemisessa
  - Varmista että tiedät varianssin ja kovarianssin käsitteet sekä niiden ominaisuuksia ja osaat laskea niihin liittyviä tehtäviä
  - Varmista että tiedät momenttien käsitteet ja tiedät momenttiemäfunktion määritelmän ja osaat laskea pari ensimmäistä momenttia momenttiemäfunktion avulla
- Tee laskuissa järjestyystarkistuksia:
  - onko laskemani  $t_n$   $p$  välillä  $0 \leq p \leq 1$ ? (Tiedämme, että tapahtuman todennäköisyys toteuttaa tuon aina)
  - onko laskemani varianssi varmasti  $\geq 0$ ? (Varianssi on  $s_m$ :n  $(X-EX)^2$  odotusarvo, joten se on aina ei-negatiivinen)
  - onko laskemani ei-negatiivisen satunnaismuuttujan odotusarvo varmasti  $\geq 0$ ? (edellisen kohdan yleisty 😊)

- onko laskemallani kertymäfunktiolla kertymäfunktion ominaisuudet?
- onko johtamani tiheysfunktio varmasti  $\geq 0$ ?
- Jos törmäät laskussa hankalaan kohtaan ja joudut aikapulaan, niin **selosta koepaperissa, millä strategialla olet laskua laskemassa**. Hyvästä strategiasta voi saada suuren osan jaossa olevista pisteistä.
- kysymyksiä voi (ja kannattaa tehdä) presemossa kautta. Pidempiäkin vastauksia voin antaa (mitkä kirjoitan käsin (tai LaTeXilla), laitan tänne linkin ja kerron siitä presemossa)
- Luennolla tarkasteltiin **vanhaa kurssikoetta vuodelta 2011** ja tässä lyhyitä **ratkaisuehdotuksia** niihin (korjattu presemossa huomattu laskuvirhe kohdassa 1b).

## Pisteytys

Jos suoritat kurssin kurssikokeilla, niin voit saada laskuharjoitustehtävien ratkaisuisista lisäpisteitä koepisteiden lisäksi. Jotta saisit suoritettua kurssin kurssikokeilla, sinun pitää saada kummastakin kurssikokeesta vähintään kolme pistettä. Lisäksi kurssikokeiden (a 24 pistettä) pisteiden sekä lisäpisteiden summan pitää yhteen laskettuna olla (alustavasti) vähintään 22.

- Laskuharjoituksista saa lisäpisteitä (max 7 pistettä.)
- Laskuharjoituksista saa pisteitä seuraavasti: 20% = 1p; 30% = 2p; 40% = 3p; ...; 70% = 6p; 80% = 7p.

## Kurssimateriaali

### Luentokalvot

Luentokalvot (näitä päivitetään luentojen aikana) luvuittain:

- [Johdanto](#) (lisätty: 5.9.2016)
- Luku1 (lisätty: 5.9.2016, päivitetty: 7.9.2016)
- Luku2 (lisätty: 12.9.2016, päivitetty viimeksi: 21.9.2016: numeroidut määritelmät ja lauseet)
- Luku3 (lisätty: 21.9.2016, päivitetty viimeksi: 28.9.2016: muutamia luennoilla huomattuja painovirheitä korjattu)
- Luku4 (lisätty: 28.9.2016, päivitetty: 12.10.2016)
- Luku5 (lisätty: 12.10.2016, päivitetty: 17.10.2016)
- Luku6 (lisätty: 28.10.2016, luento: [31.10.2016 tauluteksti](#), luento: [2.11.2016 tauluteksti](#))
- Luku7 (lisätty kokonaan: 14.11.2016, päivitetty: 18.11.2016: luennolla huomattu painovirhe korjattu)
  - luento: 7.11.2016 tauluteksti, luento: 9.11.2016 tauluteksti
  - luento: 14.11.2016 tauluteksti, luento: 16.11.2016 tauluteksti, luento: 21.11.2016 tauluteksti
- Luku8 (lisätty: 18.11.2016)
- Luku9 (lisätty: 27.11.2016)
- Luku10 (lisätty: 4.12.2016)
  - luento: 5.12.2016 tauluteksti (pikakertaus lähes koko luvusta 9 sekä luvun 10 alkua)
- Luku11 (lisätty: 12.12.2016)

Huom! Luentokalvoihin tulee toisinaan korjauksia tai lisäyksiä, siksi laitan mukaan aina myös viimeisen muokausajan. Joten kannattaa ennen lukemista hakea uusin versio.

### Muuta luennoilla käytettyä materiaalia

- Luku2: tiheysfunktion estimointi ja eksponenttijakauman simulointiesimerkki (lisätty: 21.9.2016)

### Esimerkkejä ja esimerkkilaskuja

Tähän lisään (myös pyynnöstä) esimerkkejä luentojen seuraamisen ja tehtävien tekemisen tueksi.

- Luku2: esimerkkilaskuja (lisätty: 22.9.2016)
- Luku2: esimerkki jatkuvan satunnaismuuttujan muunnoksesta, kun  $g$  on monotoninen (lisätty: 3.10.2016)
- Luku2: esimerkki jatkuvan satunnaismuuttujan muunnoksesta, missä  $g$  ei monotoninen (lisätty: 27.9.2016)
- Luku3: riippumattomuus (Esim1. klassinen nopanheitto, Esim2. yleensä  $X$  ei riippumaton itsestään, vakiosm riippumaton itsestään, ...) (lisätty: 3.10.2016)
  - Jatkoesimerkki ( $X$  riippumaton itsestään  $\Rightarrow X$  on vakiosm (ylikärsä, vaikkakin kurssin tekniikoilla saavutettavissa) (lisätty: 3.10.2016)
- Luku3: riippumattomuus (Esim. yleensä jos  $sm X$  ja  $Y$  riippuvat jostain samasta  $sm$ :stä, niin  $X$  ja  $Y$  eivät riippumattomia) (lisätty: 3.10.2016)
- Luku3: riippumattomuus (Esimerkkejä joissa:  $X$  ja  $Y$  jotka eivät riippumattomia, mutta  $g(X)$  ja  $h(Y)$  ovat riippumattomia) (lisätty: 3.10.2016)
- Luku4-5: tasajakauma odotusarvo ja varianssi eri tavoin laskettuna (lisätty: 18.10.2016)
- Luku4: varianssien ja kovarianssien laskuesimerkkejä ominaisuuksien ja riippumattomuuden avulla (lisätty: 18.10.2016)
- Luku4: jos  $X$  riippumaton itsestään ja sillä on varianssi  $\Rightarrow X$  on vakiosm (helppo esimerkki:  $\text{var } X = \text{cov}(X,X) = 0$ , jos  $X$  on riippumaton itsestään  $\Rightarrow X = EX$  tn:llä 1, lisätty: 28.10.2016)
- Luku4-5: momenttiemäfunktio ja potenssisarja esimerkkilasku (lisätty 18.10.2016)
- Luku4-5: kumulanttienäfunktioista esimerkkejä (potenssisarjoista ja muusta, lisätään: 19.10.2016, hups: tämä on jäänyt lisäämättä... lisätään myöhemmin)
- Luku 6: Tsebysevin ey, Markovin ey ja normaalijakauman hännät (lisätty: 31.10.2016)
- Luku 7: Milloin funktio on ytf ja reunajakaumien määrääminen yhteisjakaumasta + muunnosten odotusarvoja sekä kovarianssimatriisi: osa 1 (lisätty: 14.11.2016)
- Luku 7: Milloin funktio on ytf ja reunajakaumien määrääminen yhteisjakaumasta + muunnosten odotusarvoja sekä kovarianssimatriisi (hieman haastavampi alue sekä Fubinin käytöstä): osa 2 (lisätty: 15.11.2016)
- Luku 7: Riippumattomuus ja tulomuotoesimerkkejä (lisätään: 22.11.2016)
- Luku 7: Tiheyden muunnoskaavaesimerkkejä (lisää esimerkkejä pikkuhiljaa)
  - Esimerkki 1 (lisätty: 22.11.2016)
- Indikaattorilaskelmista, jakauman kantajasta ja integroimisrajoista (lisätään: 22.11.2016)
- Luku 8: Ehdollinen tiheysfunktio: laskuesimerkkejä (lisätään: 22.11.2016)

- Jatkoa luvun 7 muunnosesimerkille 1 (lisätty: 22.11.2016), sisältää myös ehdollisia odotusarvoja
- Luku 9: Positiivisesti definitit matriisit ja Sylvesterin kriteeri (lisätty: 4.12.2016)

## Opetusmoniste

Opetusmoniste pysyy samana kuin viimeiset vuodet (jos muokkaan niitä, niin lisään muutokset näkyviin 😊)

Petri Koistinen: Todennäköisyyslaskenta, [Osa 1](#) (luvut 1–5), [Osa 2](#) (luvut 6-11)

## Luentopäiväkirja

Tähän kirjataan, mitä luennolla on tarkoitus käsitellä ja myös mitä on käsitelty. Kyseisiin **monisteen (sekä kalvojen) jaksoihin on syytä tutustua ennen luentoa.**

Luennon jälkeen päivitän päiväkirjaan tarkemmin, mitä luennolla oikeasti käsiteltiin.

### Periodi I (5.9.-23.10)

Viikko 36:

- ma 5.9. Johdantoa; monisteen jaksot 1.1-1.3.
- ke 7.9: monisteen jaksot 1.4-1.7.

Viikko 37:

- ma 12.9: monisteen jaksot 1.8 ja 2.1-2.3.
- ke 14.9: monisteen jaksot 2.3-2.7.

Viikko 38:

- ma 19.9: luvun 2 kertaus ja monisteen jaksot 2.8-2.9
- ke 21.9: simulointiesimerkki ja monisteen jakso 2.10

Viikko 39:

- ma 26.9: yhteenveto luvuista 1 ja 2 sekä monisteen jaksot 3.1-3.4
- ke 28.9: monisteen jaksot 3.3-3.6

Viikko 40:

- ma 3.10: monisteen jakso 3.5 ja monisteen jaksot 4.1-4.4.
- ke 5.10: monisteen jaksot 4.4.-4.6

Viikko 41:

- ma 10.10: monisteen jaksot 4.6.-4.7
- ke 12.10: momenttiemäfunctiot ja monisteen luku 5

Viikko 42:

- ma 17.10: monisteen luku 5 loppuun
- ke 19.10: kertausta

### Viikko 43 (koeviikko)

- pe 28.10. Ensimmäinen kurssikoe

### Periodi II (31.10.-18.12)

Viikko 44:

- ma 31.10: monisteen lukua 6
- ke 2.11: monisteen lukua 6

Viikko 45:

- ma 7.11: pari epäyhtälöä ja monisteen lukua 7.1
- ke 9.11: monisteen lukuja 7.1-7.4 sekä 7.7

Viikko 46:

- ma 14.11: luvun 7 kertaus sekä monisteen luvut 7.4-7.7
- ke 16.11: monisteen luvut 7.6-7.8

Viikko 47:

- ma 21.11: monisteen luku 7.8 (7.9) ja monisteen lukua 8
- ke 23.11: monisteen luku 8

Viikko 48:

- ma 28.11: monisteen luvun 8 esimerkit ja monisteen luku 9
- ke 30.11: monisteen luku 9

Viikko 49:

- ma 5.12: monisteen luku 9 loppuun ja monisteen lukua 10
- ke 7.12: monisteen luku 10

Viikko 50:

- ma 12.12: monisteen luku 10 sekä hieman lukua 11
- ke 14.12: kertausta, vanha kurssikoe ja niin edelleen

## Viikko 51 (koeviikko)

- ti 20.12 Toinen kurssikoe

## Ilmoittaudu kurssille

Unohditko ilmoittautua? [Katso ohjeet täältä!](#)

## Laskuharjoitukset

### Harjoitustehtävät

- [Tehtävät 1](#) (lisätty: 6.9.2016)
- [Tehtävät 2](#) (lisätty: 13.9.2016)
- [Tehtävät 3](#) (lisätty: 21.9.2016)
- [Tehtävät 4](#) (lisätty: 28.9.2016)
- [Tehtävät 5](#) (lisätty: 5.10.2016)
- [Tehtävät 6](#) (lisätty: 12.10.2016, huipukkuus oli tässä englanniksi "kurtosis". Myös "excess kurtosis" käännetään tyypillisesti suomeksi huipukkuudeksi)
- [Kertaustehtäviä](#) (lisätty: 19.10.2016)
- [Tehtävät 7](#) (lisätty: 31.10.2016, nämä käsitellään harjoituksissa siis 8.-11.11.2016)
- [Tehtävät 8](#) (lisätty: 8.11.2016)
- [Tehtävät 9](#) (lisätty: 16.11.2016, muokattu: 18.11.2016: tehtävästä 2 puuttuu oletus: "tason pisteet  $(x_i, y_i)$  ovat erillisiä")
- [Tehtävät 10](#) (lisätty: 23.11.2016, muokataan: 28.11.2016: tehtävästä 1 puuttuu oletus: "sm:lla  $h(X)$  on äärellinen toinen momentti")
- [Tehtävät 11](#) (lisätty: 30.11.2016)
- [Tehtävät 12](#) (lisätty 7.12.2016)
- [Kertaustehtäviä](#): (lisätty 8.12.2016, hieman lisää myöhemmin)

### Ratkaisuehdotukset

- Tehtävät 1 (lisätty: 16.9.2016)
- Tehtävät 2 (lisätty: 23.9.2016)
- Tehtävät 3 (lisätty: 4.10.2016, muokattu (korjattu preseemossa havaittuja virheitä): 5.10.2016)
- Tehtävät 4 (lisätty: 8.10.2016)
- Tehtävät 5 (lisätty: 15.10.2016)
- Tehtävät 6 (lisätty: 22.10.2016, huipukkuus oli tässä englanniksi "kurtosis")
- Kertaustehtäviä:
  - tehtävät 1-4 (lisätty: 24.10.2016, uudelleen skannattu: 25.10.2016)
  - tehtävät 5-7 (lisätty: 25.10.2016)
  - tehtävät 8-11 (lisätty: 25.10.2016)
  - tehtävät 12-15 (lisätty: 25.10.2016)
  - tehtävät 16-19 (lisätty: 25.10.2016)
  - tehtävät 20-23 (lisätty: 25.10.2016)
  - tehtävät 24-25 (lisätty: 25.10.2016)
- Tehtävät 7 (lisätty: 12.11.2016, päivitetään: 21.11.2016)
- Tehtävät 8 (lisätty: 18.11.2016)
- Tehtävät 9 (lisätty: 29.11.2016)
- Tehtävät 10 (lisätty: 4.12.2016)
- Tehtävät 11 (lisätty: 12.12.2016)
- Tehtävät 12 (lisätty 17.12.2016)
- Kertaustehtäviä: (lisätty periaatteessa 12.12.2016, monessa tehtävässä on hieman varioitu tehtävänanto joten ehdotuksetkin ovat "viitteellisiä". Jotain tehtävää siis jää vielä kerrattavaksikin 😊)
  - sivut 1-3 (lisätty: 12.12.2016)
  - sivut 4-6 (lisätty: 12.12.2016)
  - sivut 7-11 (lisätty: 12.12.2016)
  - sivut 12-16 (lisätty: 12.12.2016)

- sivut 17-18 (lisätty: 12.12.2016)
- sivu 19 (lisätty: 12.12.2016)
- Muokatut tehtävät (lisätty: 18.12.2016, skannauksen laatu on aika heikko)

## Harjoitusryhmät

| Ryhmä | Päivä | Aika  | Paikka | Pitäjä          |
|-------|-------|-------|--------|-----------------|
| 1.    | ti    | 8-10  | B322   | Joonas Nuutinen |
| 2.    | ti    | 12-14 | B322   | Aku Leivonen    |
| 3.    | ti    | 16-18 | B321   | Aku Leivonen    |
| 4.    | ke    | 8-10  | B322   | Topias Tolonen  |
| 5.    | to    | 16-18 | B322   | Topias Tolonen  |
| 6.    | pe    | 8-10  | B322   | Joonas Nuutinen |

## Palautetta kurssista

Matematiikan ja tilastotieteen laitoksella on käytössä jatkuva palautteen keruu eli voit antaa palautetta missä tahansa kohdassa kurssia. Palautelomakkeeseen pääset [täältä](#).