

Topologia II – Harjoitus 1 (21. 1. 2013)

1. Olkoon X joukko ja $(\mathcal{T}_j)_{j \in J}$ perhe X :n topologioita, jossa indeksijoukko J on epätyhjä. Näytä, että $\mathcal{T} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{T}_j$ on X :n topologia. (Väisälä 1:1)
2. Anna esimerkki sellaisista joukon $\{1, 2, 3\}$ topologioista \mathcal{T} ja \mathcal{T}' , että $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ ei ole topologia.
3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Topologia I:ssä on määritelty, että joukko $A \subset X$ on avoin, jos jokaista $x \in A$ kohti on olemassa sellainen $r > 0$, että avoin kuula $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ sisältyy A :han. Olkoon \mathcal{T}_d tällaisten avointen joukkojen A kokoelma. Varmista (kertaa Topologia I:stä), että \mathcal{T}_d täyttää X :n topologiaalta vaadittavat ehdot (T1)–(T3).
4. Olkoot d ja e joukon X metriikkoja, joille pätee $d(x, y) \leq c \cdot e(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$, jossa $c > 0$ on vakio. Osoita, että \mathcal{T}_d on karkeampi kuin \mathcal{T}_e . (Vrt. Väisälä 1:12)
5. Oletetaan, että $U \subset \mathbb{R}$ on epätyhjä avoin joukko ja $x \in \mathbb{R} \setminus U$. Onko mahdollista, että yhdiste $U \cup \{x\}$ on a) avoin mutta ei suljettu, b) suljettu mutta ei avoin, c) avoin ja suljettu, d) ei avoin eikä suljettu? Kussakin kohdassa anna esimerkki vaaditunlaisista U ja x tai perustelee, että tilanne ei ole mahdollinen.

Kuten aina oletusarvoisesti, tässä \mathbb{R} varustetaan tavallisella euklidisella topologiallaan.

6. Olkoon X epätyhjä joukko ja

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X \setminus A \text{ on äärellinen}\}.$$

Näytä, että \mathcal{T} on X :n topologia (ns. *kofiniitti topologia*). Näytä lisäksi, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä: i) X on äärellinen, ii) (X, \mathcal{T}) on diskreetti, iii) (X, \mathcal{T}) on Hausdorff. (Vrt. Väisälä 1:3)

Lisäpisteitä (kurssikoepisteiden jatkoksi) saa tehtävien ratkaisemisesta 1, 2, 3, 4, 5, 6 tai 7, jos ratkaisee vastaavasti 25, 35, 45, 55, 65, 75 tai 85 prosenttia annetuista tehtävistä. Pisteiden saanti edellyttää läsnäoloa harjoitusryhmässä ja valmiutta esittää ratkaisu taululla.

Kurssikokeista saa enintään 20 + 20 pistettä, ja välttämätön ehto hyväksyttävälle suoritukselle on, että kummastakin kokeesta saa ainakin 7 pistettä. Kokeiden ajankohdat ilmoitetaan lähiaikoina.