

## Astrofysiikan peruskurssi II – harjoitus 6 kevät 2020

*Ratkaisut on palautettava ke 29.4. klo 12.15 mennessä kurssin Moodle-sivulle.*

*Mallivastaukset ilmestyvät kurssin Moodle-sivulle to 30.4.*

1. Tarkastellaan kahden energiatilan (tilat 1 ja 2) atomia mustan kappaleen säteilykentässä. Oletetaan, että Rayleigh–Jeans-approksimaatio on voimassa. Osoita että ylempään tilaan elinikä säteilysiirtymien suhteen saadaan kaavasta:

$$\tau_2^{-1} = A_{21} \frac{kT}{h\nu},$$

kun huomioidaan spontaani ja indusoitu emissio.

2. Vedyn 21 cm viiva ( $\lambda = 21.1049$  cm) syntyy perustilan ( $n = 1, l = 0$ ) ylihienorakenne-tilojen  $F = 0$  ( $g_0 = 1$ ) ja  $F = 1$  ( $g_1 = 3$ ) välisestä siirtymästä. Laske tilojen miehityslukujen suhde kineettisen lämpötilan arvoilla  $T_{\text{kin}} = 5$  K, 20 K ja 100 K.

*Vihje: Törmäyssiirtymät dominoivat.*

3. Tarkastellaan vetypilveä, jonka spinlämpötila on  $T_s$  ja optinen paksuus 21 cm viivan kohdalla säteisnopeuden funktiona on  $\tau_{21}(\nu)$ . Pilven ympäristössä on mitattu 21 cm spektriviivan kirkkauslämpötila  $T_E(\nu)$ . *Huom: kirkkauslämpötila mitataan kontinuumitasosta  $T_C$  lähtien, joten  $T_{b,21} = (T_s - T_C)(1 - e^{-\tau_{21}})$ .*

Osoita, että pilven ja sen ympäristön mitattujen kirkkauslämpötilojen erotus on

$$\Delta T_b = T_{\text{cloud}} - T_{\text{sky}} = (T_s - T_C - T_E)(1 - e^{-\tau_{21}}).$$

4. Tarkastellaan neutraaleja hiiliatomeja tähtienvälisessä pilvessä, jonka tiheys on  $n = 10^3$  cm<sup>-3</sup> ja lämpötila  $T = 50$  K. Oletetaan, että vain kolme alinta energiatasoa (statistiset painot 1, 3, 5) ovat miehitettyinä. Mahdollisten spektrisiirtymien taajuuudet ja Einsteinin kertoimet ovat  $\nu_{0,1} = 4.915 \cdot 10^{11}$  Hz,  $A(1 \rightarrow 0) = 7.93 \cdot 10^{-2}$  ja  $\nu_{1,2} = 8.115 \cdot 10^{11}$  Hz,  $A(2 \rightarrow 1) = 2.65 \cdot 10^{-1}$ . Törmäyskertoimet ovat  $Q(1 \rightarrow 0) = 9.11 \cdot 10^{-5}$  s<sup>-1</sup> m<sup>-3</sup>,  $Q(2 \rightarrow 1) = 1.85 \cdot 10^{-4}$  s<sup>-1</sup> m<sup>-3</sup> ja  $Q(2 \rightarrow 0) = 9.57 \cdot 10^{-5}$  s<sup>-1</sup> m<sup>-3</sup>. Laske puuttuvat kertoimet, joita tarvitaan tasapainoyhtälöiden muodostamiseksi.

Kirjoita myös tilojen miehityslukujen laskemisessa tarvittavat tasapainoyhtälöt kun oletetaan, että ainoana vaikuttavana säteilykenttänä on 2.7 K kosminen mustan kappaleen säteily.

5. Tarkastellaan kahden energiatilan (tilat 1 ja 2) atomin spektriviivasiirtymän  $2 \rightarrow 1$  lähdefunktiota. Merkitään  $q = N'Q_{21}/A_{21}$  ja  $\beta = q(1 - e^{-h\nu/kT})$ . Osoita että lähdefunktion lauseke on

$$S_\nu = \frac{\beta B_\nu(T)}{1 + \beta} + \frac{J_\nu}{1 + \beta},$$

missä  $B_\nu(T)$  on Planckin funktio ja  $J_\nu$  on ympäröivän säteilykentän keskimääräinen intensiteetti. Oletetaan, että tämän taustasätelyn intensiteetti on paljon suurempi kuin tarkasteltavan spektriviivan intensiteetti, jolloin spektriviivan vaikutusta säteilykenttään ei tarvitse ottaa huomioon.

*Vihje: Monisteen kohdasta 3.3.3 löytyvät yhtälöt voidaan kirjoittaa muotoon:*

$$\frac{g_1 N_2}{g_2 N_1} = \frac{q e^{-h\nu/kT} + (c^2/2h\nu^3) J_\nu}{q + 1 + (c^2/2h\nu^3) J_\nu}.$$

*Tämä voidaan sijoittaa suoraan monisteessa (kohdassa 3.3.1) ja luennolla johdettuun lähdefunktion lausekkeeseen.*