# Astrofysiikan peruskurssi II – harjoitus 3 kevät 2020

*Ratkaisut on palautettava ke 1.4. klo 12.15 mennessä kurssin Moodle-sivulle.*
*Mallivastaukset ilmestyvät kurssin Moodle-sivulle to 2.4.*

1. Tässä ja seuraavassa tehtävässä johdetaan Rosselandin approksimaatio säteilyvuolle:

$$\mathcal{F}(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa_R}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}, \tag{1}$$

missä *Rosselandin keskimääräinen absorptiokerroin* $\kappa_R$ on määritelty:

$$\kappa_R^{-1} = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu^{-1}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\,\mathrm{d}\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T}\,\mathrm{d}\nu}. \tag{2}$$

Oletetaan paikallinen termodynaaminen tasapaino (LTE) ja jätetään sironta huomiomatta. Osoita, aluksi että säteilynkuljetusyhtälön likimääräinen ratkaisu on tällöin

$$I_\nu(z,\mu) \approx B_\nu(T) - \frac{\mu}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial z}$$

kun derivaatta $z$:n suhteen on pieni ja $\mu = \cos\theta$. Lopuksi, osoita, että monokromaattinen säteilyvuo on tällöin

$$\mathcal{F}(z) = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}.$$

2. Integroimalla edellinen lauseke kaikkien taajuuksien yli saadaan säteilyn kokonaisvuo. Osoita, että kokonaisvuo voidaan kirjoittaa yhtälöä (1) vastaavaan muotoon, mikäli $\kappa_R$ määritellään kuten yhtälössä (2).

3. Johda lauseke viiva-absorptiokertoimien $\bar{k}$ ja $\bar{k}'$ suhteelle yleisessä tapauksessa, jolloin LTE ja a Boltzmannin kaava eivät ole voimassa. $\bar{k}$ on pelkät absorptiot huomioonottava absorptiokerroin ja $\bar{k}'$ indusoiduilla emissioilla korjattu absorptiokerroin.

4. Oletetaan että tiloille $u$ ja $l$ pätee tasapainoehto

$$N_u(A_{u,l} + B_{u,l}I_\nu) = N_l B_{l,u} I_\nu$$

ja että miehityslukujen suhde $N_u/N_l$ noudattaa Boltzmannin kaavaa.

   (a) Osoita, että säteilyn intensiteetille $I_\nu$ saadaan Planckin lain mukainen lauseke LTE:ssä kun kertoimilla $A_{u,l}$, $B_{u,l}$ ja $B_{l,u}$ on voimassa ylläoleva relaatio.

   (b) Osoita myös, että jos indusoitua emissiota ei oteta huomioon, saadaan Planckin säteilylain sijasta Wienin säteilylaki.

5. Lähtien liikkeelle säteilynkuljetusyhtälöstä pallosymmetrisessä tapauksessa (edellisen kurssin harjoitustehtävä 3.2):

$$\cos\vartheta\frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial I_\nu}{\partial\vartheta} = \rho(j_\nu - k_\nu I_\nu),$$

osoita, että säteilyvuolle saadaan seuraava yhtälö pallosymmetrisessä geometriassa:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}_\nu}{\mathrm{d}r} + \frac{2}{r}\mathcal{F}_\nu = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\mathcal{F}_\nu) = 4\pi\rho(j_\nu - k_\nu J_\nu).$$