

Astrofysiikan peruskurssi II – harjoitus 1 kevät 2020

Laskupaja pe 13.3. klo 12.15. Ratkaisut on palautettava ke 18.3. klo 23.59 mennessä kurssin Moodle-sivulle.

Mallivastaukset ilmestyvät kurssin Moodle-sivulle to 19.3.

1. Tarkastellaan sähkömagneettista aaltoa

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos(\omega(\sqrt{\epsilon\mu}z - t)) + \mathbf{e}_y E_0 \sin(\omega(\sqrt{\epsilon\mu}z - t)),$$

missä E_0 on vakio. Määritä aallon magneettivuon tiheys \mathbf{B} ja Poyntingin vektori \mathbf{S} .

2. Johda luentomonisteessa esiintynyt tulos klassisen oskillaattorin keskimääräiselle säteilytehollle:

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = -\frac{16\pi^4 \nu^4}{3c^3} p_0^2 = -\frac{8\pi^2 \nu^2 e^2}{3mc^3} W,$$

missä $p_0 = ez_0$ on oskillaattorin dipolimomentin maksimiarvo ja $W = kz_0^2/2 = m\omega^2 z_0^2/2$ on oskillaattorin energia.

3. Polarisatioellipsi.

Yleisen z -akselin suuntaan etenevän sähkömagneettisen aallon sähkökenttä voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{E}(z, t) = (E_1 e^{i\phi_1} \mathbf{e}_x + E_2 e^{i\phi_2} \mathbf{e}_y) e^{i\psi} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Laske aallon fysikaaliset (reaaliset) komponentit E_x ja E_y . Johda näitä komponentteja käyttäen yhtälö

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_1}\right)\left(\frac{E_y}{E_2}\right)\cos\phi = \sin^2\phi,$$

missä $\phi = \phi_2 - \phi_1$. Osoita, että yhtälö kuvaa koordinaattiakselien suuntaista ellipsiä kun $\phi = \pi/2$. Mitä ellipsille tapahtuu kun $\phi \neq \pi/2$?

4. Pulsari on nopeasti pyörivä neutronitähti, jonka hyvin voimakkaan magneettikentän suurin vuontiheys pulsarin pinnalla on B_0 . Mikäli pulsarin magneettinen akseli ei ole saman suuntainen pulsarin rotaatioakselin kanssa, tuloksena on muuttuva magneettinen dipolimomentti $\mathbf{m}(t)$, joka säteilee magneettista dipolisäteilyä. Olettaen, että pulsarin massa on M , säde on R , pyörimisen kulmanopeus on ω ja magneettisen akselin ja rotaatioakselin välinen kulma on α osoita, että säteilytehollle voidaan johtaa lauseke (cgs-yksiköissä):

$$P = \frac{\omega^4 R^6 B_0^2 \sin^2 \alpha}{6c^3}.$$

Vihje: Magneettisen dipolisäteilyn tehon saa sähköisen dipolisäteilyn tehosta korvaamalla sähköisen dipolimomentin magneettisella dipolimomentilla.

5. Pulsarin pyörimisen hidastuminen.

- (a) Olettaen, että pulsarin säteilyenergian lähteenä on sen pyörimisenergia, johda lauseke pulsarin pyörimisen hidastuvuutta kuvaavalle aikaskaalalle $\tau = -\omega/\dot{\omega}$.
- (b) Laske arviot säteilytehollle P ja aikaskaalalle τ pulsarille, jonka massa on $M = 1M_\odot$, säde on $R = 10$ km, suurin magneettivuon tiheys pinnalla on $B_0 = 10^{12}$ gauss ja magneettisen akselin kulma on $\alpha = 90^\circ$ pyörimisen kulmanopeuksille $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$ ja $\omega = 10^3 \text{ s}^{-1}$.