## 5. Radon- ja Fourier muunnosten välinen yhteys

Kun $\omega \in S^{n-1} = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid |z| = 1 \}$,

ja $s \in \mathbb{R}$, määrittelimme funktiolle

$f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$L(\omega, s) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot \omega = s \}$$

ja

$$Rf(\omega, s) = \int_{L(\omega,s)} f(x)\, dH(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(s\omega + t_1 \varrho_1 + \dots + t_{n-1} \varrho_{n-1})\, dt_1 \dots dt_{n-1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(s\omega + \vec{t} \cdot \vec{\varrho})\, dV(\vec{t}), \qquad (1)$$

missä $|\varrho_j| = 1$, $\varrho_j \perp \varrho_k$, $j \neq k$ ja $\mathrm{span}(\omega, \varrho_1, \dots, \varrho_{n-1}) = \mathbb{R}^n$.
Kaavalla (1) voimme määritellä $Rf(\omega, s)$ alueessa

$$(\omega, s) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$$

kun $\|f\|_{\alpha,0} \le C_0$, kun $|\alpha| \le n+l$,

niin

$$|f(x)| \le \frac{C_1}{(1+|x|)^l} \cdot \frac{1}{(1+|x|)^n}, \quad C_1 = 2^{n+l}C_0$$

ja

$$|Rf(\omega,s)| \le \frac{C_1}{(1+|s|)^l} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{1}{1+|\vec{t}|}\right)^n dV(\vec{t})$$

$$\le \frac{C_2}{(1+|s|)^l}.$$

Siispä kaikilla $\omega \in S'$ funktio

$$R_\omega f : s \mapsto Rf(\omega, s)$$

(eli $R_\omega f(s) = Rf(\omega,s)$) on $L^p(\mathbb{R})$:ssä, $1 \le p \le \infty$

ja voimme ottaa s-muuttujan suhteen Fourier-muunnoksen

$$\mathcal{F}_{s\to\sigma}(R_\omega f)(\sigma) = \widehat{R_\omega f}(\sigma)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma s} R_\omega f(s)\, ds$$

## Lause 5.1 (Fourier slice theorem)

Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin kaikille $\omega \in S^{n-1}$

$$\Big[\underbrace{\mathcal{F}_{s\to\sigma}}_{\substack{\uparrow \\ \text{1-ulotteinen} \\ \text{F-muunnos}}} R_\omega f\Big](\sigma) = \Big(\underbrace{\mathcal{F}_{x\to\xi}}_{\substack{\uparrow \\ \text{n-ulotteinen} \\ \text{F-muunnos}}} f\Big)(\sigma\omega)$$

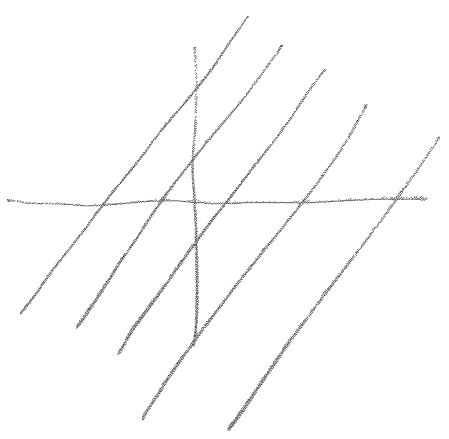
eli:

$$\widehat{R_\omega f}(\sigma) = \hat{f}(\sigma\omega)$$

<u>tod.</u> $\widehat{R_\omega f}(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma s} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(s\omega + \vec{t}\cdot\vec{\xi})\, d\vec{t}\, ds$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\sigma\omega} f(x)\, dx = \hat{f}(\sigma\omega),$$

missä $(\omega, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ on $\mathbb{R}^n$:n ortonormaali kanta, jolloin $\sigma s = x\cdot\sigma\omega$ pisteelle $x = s\omega + \vec{t}\cdot\vec{\xi}$. $\square$



**Inversio-ongelma I.** Olkoon $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n=2$ ja $Rf(\omega, s)$ annettu kaikilla $(\omega, s) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Etsi $f$?

**Ensimmäinen ratkaisu:**

Käännetään Fourier-muunnos:

$$f(x) = \left(\mathcal{F}_{x\to z}\right)^{-1}\left(\mathcal{F}_{x\to z} f\right)(x)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot z}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-is\sigma} R_\omega f(s)\,ds\right]_{\substack{\sigma=|z|,\\ \omega=z/|z|}} dz$$

Seuraavaksi haluamme kirjoittaa kaavan tehokkaammin, yleistää sen suuremmalle luokalle funktioita $f$ ja tutkia operaattoreiden $R$ ja $R^{-1}$ kuvausominaisuuksia

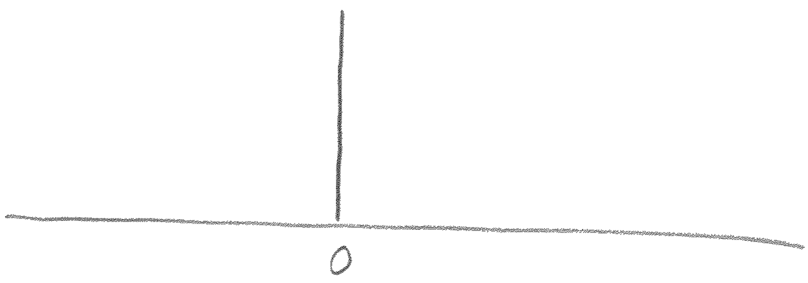
# 6. Temperoidut distribuutiot

<u>Kysymys:</u> Mitä matemaattisesti tarkoitetaan Diracin delta-distribuutiolla, eli yleistetyllä funktiolla, $\delta$, jolle "$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$" ja <u>formaalisti</u>

$$\delta(x) = 0 \quad \text{kun} \quad x \neq 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1 .$$

Fysikaalisesti, $\delta$ on idealisaatio pistemäisestä massasta tai varauksesta.



Yleistetään funktioiden $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ joukkoa:
Jokainen funktio $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ määrää lineaari-kuvauksen

$$T_f : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C},$$

$$T_f(h) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) h(x)\, dx, \quad h \in S(\mathbb{R}^n)$$

Nyt

$$|T_f h| \le \|f\|_{L^1} \cdot \|h\|_{L^\infty}$$
$$\le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \underbrace{\|h\|_{0,0}}_{S(\mathbb{R}^n)\text{:n eräs normi}},$$

joten $T_f : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ on jatkuva.

Seuraavassa kuvaus $T_f$ "samaistetaan" funktion $f$ kanssa, jolloin funktio $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ voidaan tulkita avaruuden $S'(\mathbb{R}^n)$ alkioksi.

Määr. 6.1 Temperoitujen distribuutioiden joukko $S'(\mathbb{R}^n)$ on avaruuden $S(\mathbb{R}^n)$ duaaliavaruus, eli $A \in S'(\mathbb{R}^n)$ jos

$$A : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$

on lineaarinen kuvaus, jolle jollekin $k \in \mathbb{Z}_+$ ja $C > 0$ pätee

$$(1) \quad |Ah| \le C \sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ |\beta| \le k}} \|h\|_{\alpha,\beta} \quad \text{kaikille } h \in S(\mathbb{R}^n)$$

Määr. 6.2 Olkoon $A_j, A \in S'(\mathbb{R}^n)$. Sanomme, että

$$\lim_{j\to\infty} A_j = A \quad S'(\mathbb{R}^n)\text{:ssä},$$

jos kaikille $h \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{j\to\infty} A_j h = Ah$$

Huomautus: (1) on yhtäpitävää sen kanssa, että $A : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ on jatkuva eli
$h_j \to h$ $S(\mathbb{R}^n)$:ssä $\Rightarrow$ $Ah_j \to Ah$.

# ESIMERKKEJÄ

Seuraavassa merkitään alhaalla $A \in S'(\mathbb{R}^n)$ ja $h \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\langle A, h \rangle = Ah, \quad \text{ja}$$
$$\langle h, A \rangle = Ah$$

1. Jokaiselle $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $|f(x)| \leq C(1+|x|)^k$ pätee kuvaukselle $T_f : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$,

$$T_f h = \langle T_f, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) h(x)\, dx$$

epäyhtälö (H1)

$$|T_f h| \leq C \cdot \sum_{|\alpha| \leq n+1+k} \|h\|_{\alpha,0}$$

Joten

$$T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$$

Merkitsemme usein

$$\langle f, h \rangle := \langle T_f, h \rangle = T_f h$$

2 Jos $\mu$ on kompleksinen Borel-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä, jolloin $C_0 = |\mu|(\mathbb{R}^n) < \infty$, niin kuvaus

$$T_\mu h := \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\ \mu(dx),$$

toteuttaa epäyhtälön

$$|T_\mu h| \le C_0 \|h\|_{0,0} = C_0 \|h\|_{L^\infty}, \quad h \in S(\mathbb{R}^n).$$

Siis $T_\mu \in S'(\mathbb{R}^n)$. Erikoisesti $\delta = \delta_0$,

$$\langle \delta_0, h \rangle = h(0)$$

on alkio $\delta_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$

3. Jos $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ ja $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ on funktio, jolle kaikille $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on $C_\alpha, k_\alpha$ s.e.

$$|\partial_x^\alpha g(x)| \le C_\alpha (1+|x|)^{k_\alpha},$$

voimme määritellä tulon $gu$ asettamalla

$$\langle gu, h \rangle = \langle u, gh \rangle, \quad h \in S(\mathbb{R}^n)$$

Huomaa, että $h \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow gh \in S(\mathbb{R}^n)$.
Tällöin $gu \in S'(\mathbb{R}^n)$ eli $gu : S'(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ on jva (HT).

4) Kerrataan, että jos $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ ja $h \in S(\mathbb{R}^n)$, niin

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} f, h \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \right) h(x)\, dx$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} h(x)\, dx = \left\langle f, -\frac{\partial}{\partial x_j} h \right\rangle$$

Huomaa, että $h \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} h \in S(\mathbb{R}^n)$.

Yleistetään tätä:

Kun $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, määritellään

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$

asettamalla

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} u, h \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial h}{\partial x_j} \right\rangle, \quad h \in S(\mathbb{R}^n)$$

Tällöin $\frac{\partial}{\partial x_j} u = \partial_j u \in S'(\mathbb{R}^n)$ (HT)

5) Kun $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, määritellään $u$:n Fourier-muunnos $\hat{u} = \mathcal{F}u$ kaavalla

$$\langle \hat{u}, h \rangle = \langle u, \hat{h} \rangle, \quad h \in S(\mathbb{R}^n)$$

(vrt. Lause 2.5 ja sivun 19 viimeinen kaava)

Koska $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ on jatkuva,

$$\hat{u} \in S'(\mathbb{R}^n)$$

Esim. Olkoon $u = \delta_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$. Silloin

$$\langle \hat{\delta}, h \rangle = \langle \delta, \hat{h} \rangle = \hat{h}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx$$

$$= \langle 1, h \rangle,$$

eli $\hat{\delta} = 1$ = vakiofunktio

Ht: 1) Operaatiot

$$u \mapsto gu \quad , \forall \alpha \quad |\partial_x^\alpha g| \leq C_\alpha (1+|x|)^{m_\alpha}$$

$$u \mapsto \partial_x^\alpha u$$

$$u \mapsto \hat{u}$$

ovat jatkuvia $S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$

2) Olkoon $\langle \delta_y, h \rangle = h(y)$. Osoita $\hat{\delta}_y = e^{-iy\cdot\xi}$.

6) Kun $h, g \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$h * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-z)\, g(z)\, dz$$

toteuttaa $h*g \in S(\mathbb{R}^n)$ (HT)

ja

$$\mathcal{F}(h*g) = \hat{h}(\xi)\, \hat{g}(\xi),$$

eli

$$h*g = \mathcal{F}^{-1}(\hat{h} \cdot \hat{g})$$

Kun $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ ja $g \in S(\mathbb{R}^n)$ määritellään

$$u*g = g*u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g} \cdot \hat{u}) \in S'(\mathbb{R}^n)$$

Huom: $\hat{\delta}_0(\xi) = 1$, jolloin

$$u * \delta = u$$

7) Cauchy'n pääarvointegraali.

Määritellään $A = \text{P.V.} \frac{1}{x}$ asettamalla

$$\langle \text{P.V.} \frac{1}{x}, h \rangle = \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} h(x)\, dx$$

$$:= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{1}{x} h(x)\, dx$$

Nyt kun $h \in S(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$

$$\left| \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{1}{x} h(x)\, dx \right| =$$

$$\left| \int_{\mathbb{R} \setminus (-1,1)} \frac{1}{x} h(x)\, dx \right| + \left| \int_{(-1,1) \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{1}{x} (h(x) - h(0))\, dx \right|$$

$$\leq \|h\|_{L^1(\mathbb{R} \setminus (-1,1))} + \max_{x \in [-1,1]} |h'(x)|$$

$$\leq C \cdot \sum_{|\alpha| \leq 2} \|h\|_{\alpha, 0} + \|h\|_{0,1} .$$

Siispä $\text{P.V.} \frac{1}{x} \in S'(\mathbb{R})$ ja

$$\langle \text{P.V.} \frac{1}{x}, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x} \left( h(x) - h(0) \chi_{(-1,1)}(x) \right) dx$$

Jos $\quad x^0 = \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad$ ja

$$\Theta : S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \} \to \mathbb{C}$$

on sileä funktio jolle

$$\int_{S^{n-1}} \Theta(x^0)\, dS(x^0) = 0$$

voidaan samaan tapaan kuin yllä määritellä

$$\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Theta(\frac{x}{|x|})}{|x|^n} h(x)\, dx \quad , \quad h \in S(\mathbb{R}^n)$$

8) Yleisesti, jos $\quad A : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$

on jatkuva lineaarinen operaattori, määrittelemme jatkuvan operaattorin

$$A^T : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$$

asettamalla

$$\langle A^T u, h \rangle = \langle u, Ah \rangle, \quad h \in S(\mathbb{R}^n)$$

Jatkossa tutkimme Hilbert-muunnosta

$$\mathcal{H} f(x) = \frac{1}{\pi}\left(\text{p.v.} \frac{1}{x}\right) * f = \frac{1}{\pi}\, \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z} f(z)\, dz$$

# Sobolev - avaruudet

Määr. 6.3 Sobolev-avaruus $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$ on niiden $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avaruus, joille $\hat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ja

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty .$$

Huom: Kun $s \in \{0, 1, 2, \dots\}$ on $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ ja

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \asymp \Big( \sum_{|\alpha| \le s} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2}$$

Määr 6.4 Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin,

$$H^s_0(\Omega) = cl_{H^s(\mathbb{R}^n)} \big( C^\infty_0(\Omega) \big) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$$

ja

$$H^s(\Omega) = \{ u|_\Omega : u \in H^s(\mathbb{R}^n) \}$$

$$\|w\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{w = u|_\Omega} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

# 4 Suodattimet (filters) ja pseudodifferentiaalioperaattorit

Kun $a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ on rajoitettu mitallinen funktio, sitä vastaava suodatin[⊕]

$Op(a) = A : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ on kuvaus

$$Af = \mathcal{F}^{-1}\left( a(\xi)\cdot \hat{f}(\xi) \right)$$

Tällöin $\|A\|_{L^2\to L^2} = \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Jos $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ja $K = \mathcal{F}^{-1}(a)$, pätee

$$\begin{aligned} Af(x) &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{K}\cdot \hat{f}) \\ &= K * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-z) f(z)\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(z) f(x-z)\, dz \end{aligned}$$

---

⊕ Suodattimet liittyvät pseudodifferentiaalioperaattoreihin

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi,$$

missä $\forall \alpha,\beta\ \exists C_{\alpha,\beta}$: $\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}$

konvoluutio-operaattori

$$Af = b * f, \text{ eli}$$

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}} b(z) f(x-z)\, dz$$

on kausaalinen, eli $Af(x)$ riippuu vain funktion $f(y)$ arvoista $y \leq x$ mikäli

$$b(z) = 0 \quad \text{kun} \quad z < 0.$$

<u>Lemma 4.1</u> Kausaaliselle konvoluutio-operaattorille $Af = b * f$ funktio $a(\xi) = \mathcal{F}^{-1} b = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\cdot\xi} b(x)\, dx$ voidaan laajentaa rajoitetuksi (ja analyyttiseksi) funktioksi alempaan puolitasoon $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$.

<u>Huom:</u> $Af = \mathcal{F}^{-1}(a \cdot \hat{f}) = (\mathcal{F}^{-1} a) * f$

<u>tod.</u> Jos $A$ on kausaalinen,

$$a(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} e^{ix\cdot\xi} b(x)\, dx.$$

Jos $\operatorname{Im} \xi < 0$ on $\operatorname{Re}(ix\cdot\xi) \leq 0$ kaikille $x \geq 0$ □

# 7 Radon-muunnoksen ominaisuuksia

**Lemma 7.1** Kun $w \in S^{n-1}$, $f \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$R_w\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(s) = w_j \frac{d}{ds} R_w f(s),$$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$$

**Tod** Fourier Slicing -Teoreeman nojalla, kun $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\widehat{R_w f}(\sigma) = \hat{f}(\sigma w) \iff$$

$$\mathcal{F}_{s\to\sigma}(R_w f)(\sigma) = (\mathcal{F}_{x\to\xi} f)(\sigma w) \iff$$

$$R_w f(s) = \mathcal{F}^{-1}_{s\to\sigma}\left(\mathcal{F}_{x\to\xi} f(\sigma w)\right)(s).$$

Nyt

$$h = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$$

Toteuttaa $\hat{h}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \dots \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,
eli

$$(\mathcal{F}_{x\to\xi} h)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}_{x\to\xi} f(\xi)$$

Siis

$$\hat{h}(\sigma\omega) = i\sigma\omega_j \hat{f}(\sigma\omega).$$

Olkoon nyt $g_\omega(\sigma) = \hat{f}(\sigma\omega)$. Silloin

$$\left(\mathcal{F}_{s\to\sigma}\right)^{-1}\left(i\sigma g_\omega(\sigma)\right)(s)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\mathcal{F}_{s\to\sigma}\right)^{-1}\left(g_\omega(\sigma)\right)(s)$$

Yhdistämällä nämä, saamme

$$R_\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) = \mathcal{F}^{-1}_{s\to\sigma}\left(i\sigma \overset{\text{"vakio"}}{\omega_j} \hat{f}(\sigma\omega)\right)(s)$$

$$= \omega_j \frac{d}{ds} \mathcal{F}^{-1}_{s\to\sigma}\left(\hat{f}(\sigma\omega)\right)(s) = \omega_j \frac{d}{ds} R_\omega f(s).$$

$\square$

HT: todista ylläoleva lemma kaavasta

$$R_\omega f(s) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(s\omega + \vec{t}\cdot\vec{\xi})\, dV(\vec{t})$$

valitsemalla $\omega = (1, 0, 0, \ldots, 0) \in S^{n-1}$, kun $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Olkoon seuraavassa

$$Z = \mathbb{R} \times S^{n-1}.$$

Merkitsemme $f \in C^k(Z)$ jos funktio

$$F : (s, x) \mapsto f(s, \frac{x}{|x|})$$

toteuttaa $F \in C^k(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, merkitään

$$\|f\|_{C^k_b(Z)} = \sup_{\substack{|\alpha| \leq k \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} \sup_{(s,x) \in Z} |D_x^\alpha f(s,x)|$$

Merkitään $f \in S(Z)$ jos kaikille $\alpha, \beta$

$$\|f\|_{(k)} = \sup_{\substack{(s,x) \in \mathbb{R} \times S^{n-1} \\ |\alpha| \leq k,\ \alpha \in \mathbb{N}^n \\ |j| \leq k \\ |\ell| \leq k}} s^\ell \cdot |D_s^j D_x^\alpha F(s,x)| < \infty.$$

Olkoon $g \in S(Z)$. Määrittelemme Radon-muunnoksen adjungaatin $R^*g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(1) \quad R^*g(x) = \int_{S^{n-1}} g(x\cdot\omega, \omega)\, dS(\omega)$$

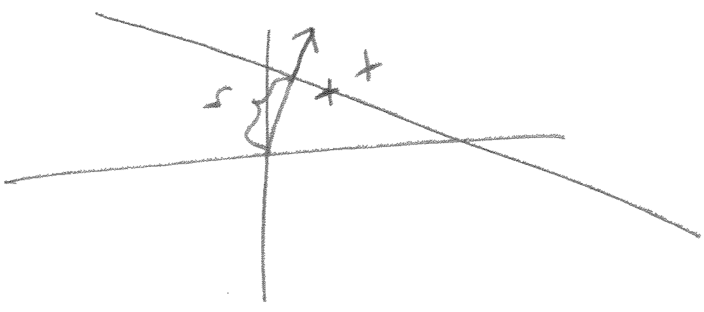
missä $dS(\omega)$ on pallon $S^{n-1}$ tilavuusmitta.

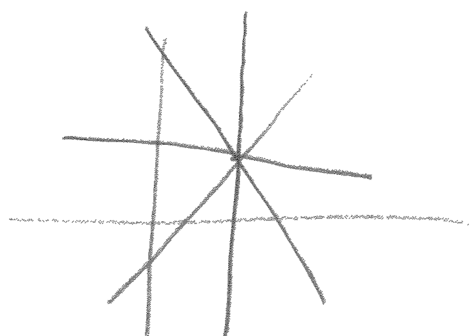
Kun $n=2$

$$R^*g(x_1,x_2) = \int_0^{2\pi} g(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi, (\cos\varphi, \sin\varphi))\, d\varphi$$

Kaava (1) voidaan kirjoittaa

$$R^*g(x) = \int_{S^{n-1}} [g(s,\omega)]_{x\in L_{s,\omega}}\, dS(\omega)$$



**Lemma 7.2** Olkoon funktioille $h, \tilde{h} \in C_0^\infty(Z)$

$$\langle h, \tilde{h} \rangle_{L^2(Z)} = \int_{\mathbb{R}} \int_{S^{n-1}} h(s,\omega) \overline{\tilde{h}(s,\omega)}\, dS(\omega) ds.$$

Silloin funktioille $g \in C_0^\infty(Z)$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\langle R^* g, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle g, Rf \rangle_{L^2(Z)}.$$

Tod Todistetaan tapaus $n = 2$, $n \geq 3$ jätetään harjoitustehtäväksi. Kun $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in S^1$ merkitään $\omega^\perp = (-\omega_2, \omega_1)$, jolloin $\omega \cdot \omega^\perp = 0$. Tehdään muuttujanvaihto $\Phi : (x, \omega) \mapsto (s, t, \omega) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$, missä $\omega \in S^1$, $x \in \mathbb{R}^2$ ja $x = s\omega + t\omega^\perp$, $s, t \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \int_{S^1} g(x \cdot \omega, \omega)\, dS(\omega)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{S^1} f(s\omega + t\omega^\perp)\, g(s, \omega)\, dS(\omega)\, ds\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{S^1} g(s,\omega) \left[ \int_{\mathbb{R}} f(s\omega + t\omega^{\perp})\, dt \right] dS(\omega)\, dt$$

$$= \int_{Z} g(s,\omega)\, Rf(s,\omega)\, dS(\omega)\, ds. \qquad \square$$

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $n=2$.

Olkoon

$$K^s(x) = \frac{1}{|x|^s}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad 1<s<2$$

Tällöin $K^s \notin L^1(\mathbb{R}^2)$, mutta $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ ja $K^s \in S'(\mathbb{R}^n)$. Jakamalle $K$ osiin

$$K^s(x) = K_0(x) + K_1(x),$$

$$K_0(x) = \chi_B(x)\, K^s(x), \quad \chi_B(x) = \begin{cases} 1, & |x|<1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$K_1(x) = (1-\chi_B(x))\, K^s(x)$$

nähdään $K_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $K_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$

Siispä

$$\hat{K}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \text{sillä} \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$$

$$\hat{K}_1 \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad \text{sillä} \quad \mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$$

Erikoisesti, $\hat{K}^s = \hat{k}_0 + \hat{k}_1 \in S'(\mathbb{R}^2)$ on lokaalisti integroituvan funktion määräämä distribuutio.

Kun $A \in \mathbb{R}^n$ on kääntyvä matriisi, niin (HT), $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p=1$ tai $p=2$

$$g(x) = h(Ax) \Rightarrow \hat{g}(\xi) = \frac{1}{\det(A)} \hat{h}\left((A^T)^{-1}\xi\right)$$

$$g(x) = h(\lambda x) \Rightarrow \hat{g}(\xi) = \lambda^{-n} \hat{h}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

Nyt $K$ on rotaatioinvariantti, joten ortogonaalimatriisille $A_0$, jolle $A_0^T = A_0^{-1}$ pätee

$$K^s(A_0 x) = K^s(x).$$

Tästä seu (det $A_0 = 1$)

$$\hat{K}^s(A_0\xi) = \hat{K}^s(\xi),$$

joten $\hat{K}^s$ on rotaatiosymmetrinen. (Notaatio: $\hat{K}^s = \widehat{K^s}(\xi)$)

Koska $K^s$ on $(-1)$ positiivihomogeeninen, eli

$$K^s(\lambda x) = \lambda^a K(x), \quad a = -5, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

niin $\widehat{k^s}(\varrho)$ toteuttaa

$$\widehat{k^s}(\varrho) = \mathcal{F}\big(k(x)\big)(\varrho)$$

$$= \mathcal{F}\big(\lambda^{-a} k(\lambda x)\big)(\varrho)$$

$$= \lambda^{-a}\, \mathcal{F}\big(k(\lambda x)\big)(\varrho)$$

$$= \lambda^{-a} \lambda^{-2}\, \widehat{k^s}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0,$$

eli kun $z = \lambda^{-1}\varrho$, saamme

$$\widehat{k^s}(\lambda z) = \lambda^{-2-a}\, \widehat{k^s}(z)$$

dimensio   homogeenisuusaste $a = -s$,

Siis $\widehat{k^s}(\varrho)$ on rotaatio-invariantti, $(-2-a) = (-2+s)$-positiivihomogeeninen mitallinen funktio.

Siispä

$$\widehat{k^s}(\varrho) = c_s |\varrho|^{-2+s}$$

jollakin $c_s \in \mathbb{C}$. Kun $s \to 1+$, niin $S'(\mathbb{R}^2)$:ssa

$\lim\limits_{s\to 1} k^s(x) = k^1(x)$, joten $\lim\limits_{s\to 1+} \widehat{k^s} = \widehat{k^1}$.

Selvästi on $c_1 \in \mathbb{C}$ s.e. $\lim\limits_{s\to 1+} c_s = c_1 \neq 0$.

Koska

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) = (2\pi)^{-2}\frac{1}{|-x|} = c_1^2 \frac{1}{|x|},$$

nähdään $c_1 = \pm 2\pi$. Oikea arvo on $+2\pi$.
(sivuutetaan)

**Lause 7.3** Olkoon $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Tällöin

1)

$$R^* R f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2}{|x-y|} f(y)\, dy$$

$$= (K * f)(x),$$

missä $K(x) = \frac{2}{|x|}$,

2) $$f(x) = -c^2 \, K * \left( \Delta_x \left( R^* R f \right)\right)(x)$$

$$= -2c^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|x-z|} \Delta_z \int_{S^1} Rf(z \cdot \theta^\perp, \theta)\, d\theta \, dz,$$

missä $c = 2\pi$

3) $f(x) = \Lambda R^* R f$, missä

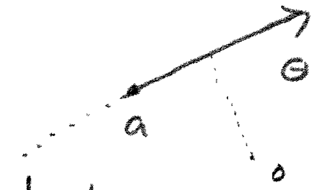
$$\Lambda h = (\mathcal{F}_{x\to\xi})^{-1} \left( \frac{1}{2c} |\xi| \cdot \mathcal{F}_{x\to\xi} h \right)$$

Kohdan 3 kaavaa kutsutaan suodatetuksi takaisinprojektioksi (filtered backprojection)

Tod. 1 Tarkastellaan funktiota

$$D_a f(\theta) = \int_0^\infty f(a + t\theta^\perp)\, dt \quad , \quad a \in \mathbb{R}^2$$

Näemme, että




$$D_a f(\theta) + D_a f(-\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a + t\theta^\perp)\, dt$$

$$= R_\theta f(a \cdot \theta, \theta)$$

Toisaalta, $\left( \int_{S^1} d\theta = 2\pi \right)$

$$\int_{S^1} D_a f(\theta)\, d\theta = \int_{S^1} \int_0^\infty \frac{f(a + t\theta^\perp)}{t}\, t\, dt\, d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(a+y)}{|y|}\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(y)}{|a-y|}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}(f * K)(a) \quad , \quad K(y) = \frac{2}{|y|}$$

ja

$$\int_{S^1} D_a f(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{S^1} \left( D_a f(\theta) + D_a f(-\theta) \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{S^1} Rf(a\cdot\theta\, , \theta)\, d\theta$$

Siispä

$$(R^* Rf)(x) = \int_{S^1} Rf(x\cdot\theta\, , \theta)\, d\theta$$

$$= \quad k * f(x) .$$

~~34~~)

2. Fourier-muunnokselle $\mathbb{R}^2$:ssa pätee

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}\left(\frac{1}{|x|}\right) = c\,\frac{1}{|\xi|}, \quad c = 2\pi.$$

Siispä

$$\widehat{K*f}(\xi) = c\,\frac{2}{|\xi|}\,\hat{f}(\xi)$$

ja koska

$$\widehat{(-\Delta h)}(\xi) = |\xi|^2\,\hat{f}(\xi),$$

pätee

$$\mathcal{F}\Big(K*(-\Delta(K*f)\Big)(\xi)$$

$$= 4c^2\,\frac{1}{|\xi|}\,|\xi|^2\,\frac{1}{|\xi|}\,\hat{f}(\xi) = c^2\,\hat{f}(\xi).$$

Kaava 2) seuraa tästä käänteis-Fourier-muunnokselle.

Kaava 3) saadaan käänteisFourier-muunnokselle kaavasta

$$\widehat{\Lambda R^* R f} = \widehat{\Lambda\, K*f} = \frac{1}{2c}|\xi|\cdot\frac{2c}{|\xi|}\,\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

∎