Inversio-ongelmat:

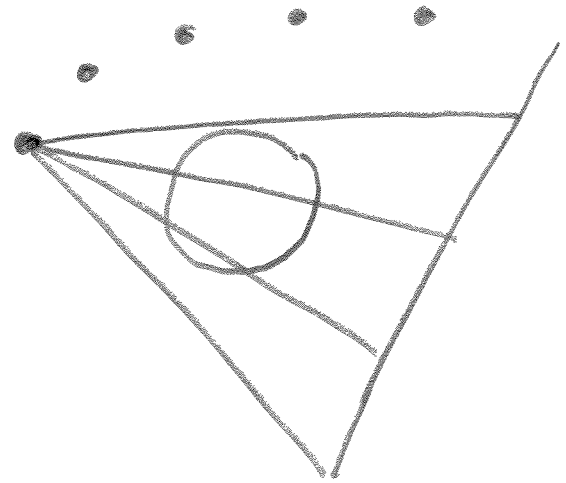
Analyyttiset inversio-ongelmat

Matti Lassas

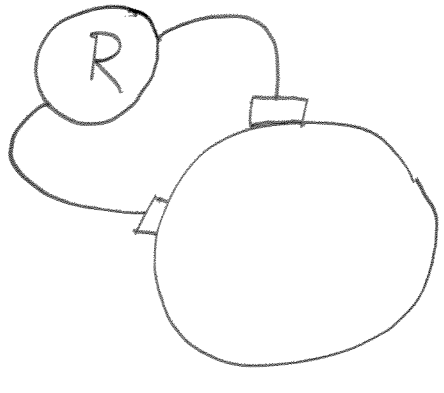
Inversio-ongelmissa pyritään selvittämään (fysikaalisten) mallien rakennetta epäsuorista mittauksista.

Esim. 1. Luodataan kappaletta (potilasta, maaperää tai molekyyliä) aallalla.
Voiko kappaleen rakenteen saada rekonstruoitua heijastuneesta aallosta?

Esim 2 Voiko kappaleen tiheyden selvittää eri suunnista otetuista röntgenkuvista (CT)?



Esim 3 Voiko kappaleen johtavuuden selvittää sen pinnalle tehdyistä virta-jännite mittauksista?



<u>Esim 4</u> Voiko solun toiminnan selvittää analysoimalla sen tuottamia kemiallisia aineita?

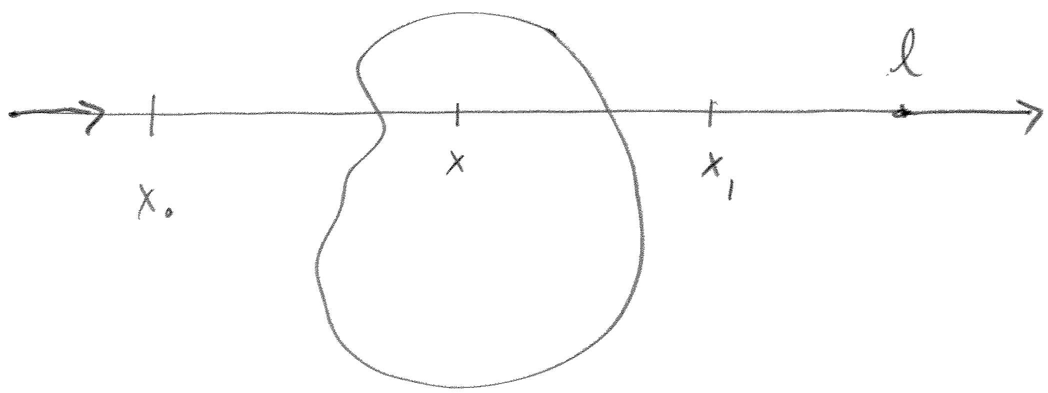
<u>Esim 5</u> Voiko osakemarkkinoita mallittavien yhtälöiden parametrejä selvittää seuraamalla markkinoiden toimintaa?

Aluksi tarkastelemme esimerkkiä 2, eli röntgentomografiaa. Tätä varten

M.L.
- esittelemme matemaattisen mallin ongelmalle
- tutkimme mallin ominaisuuksia

S.S
- esittelemme mallin erilaisia approksimaatioita (diskretisointi, kohinan vaikutus jne.)
- tarkastelemme numeerista ratkaisua ongelmalle

I. Röntgen-tomografia



Kokeellisen Beerin lain mukaan suoraa l kulkeneen röntgensäteen intensiteetti $I(x)$ toteuttaa yhtälön

$$\frac{dI}{dx}(x) = -f(x)\, I(x),$$

missä x on (Euklidinen) etäisyys pisteestä $x_0 \in L$) ja $f(x)$ on pisteessä x ja $f(x)$ on materian absorptio pisteessä x.

Yksinkertaisessa tapauksessa, jossa absorptio suoralla l häviää pisteiden x_0 ja x_1 ulkopuolella,

$$\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = -\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx, \qquad I_1 = I(x_1),\ I_0 = I(x_0)$$

Matemaattinen malli: Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{supp}(f) \subset \overline{\Omega}$. Kun $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$, $|v_0| = 1$, ja

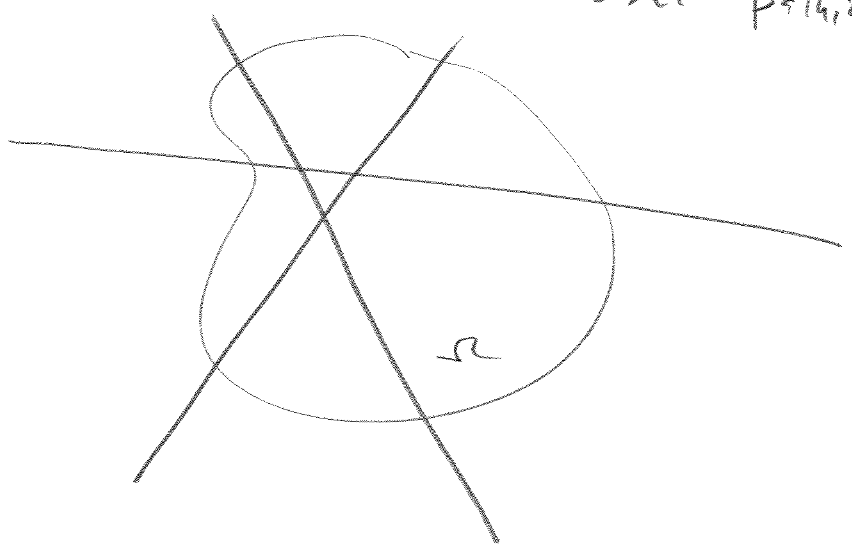
$$l = l(x_0, v_0) = \{ x_0 + s v_0 \in \mathbb{R}^n \mid s \in \mathbb{R} \}$$

on suora, merkitään

$$Xf(l) = \int_l f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + s v_0)\,ds.$$

Röntgentomografian inversio-ongelmassa tehtävänä on määrittää f kun $Xf(l)$ tunnetaan kaikilla suorilla l

- Radon 1917
- Cormack–Hounsfield 1979 Nobel palkinto



Dimensiossa $n=2$ malli liittyy Radon-muunnokseen

Määr 1.1 Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Kun $\omega \in S^{n-1} = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid |v| = 1\}$ ja $s \in \mathbb{R}$, merkitään

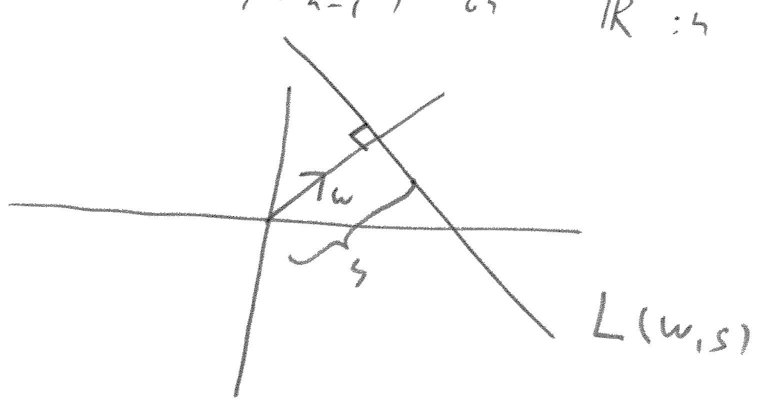
$$L(\omega, s) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot \omega = s \}.$$

Funktion f Radon-muunnos on

$$Rf(\omega, s) = \int_{L(\omega,s)} f(x)\, dH$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(s\omega + t_1 \theta_1 + \dots + t_{n-1}\theta_{n-1})\, dt_1\, dt_2 \dots dt_{n-1}$$

missä $(\omega, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ on $\mathbb{R}^n$:n ortonormaali kanta.



Huomaamme, että

$$Rf(s,\omega) = R(-s,-\omega)$$

<u>Peruskysymykset</u>

1) Onko $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ oikea luokka, jossa tutkia ongelmaa? Olisiko jokin muu R:n <u>määrittelyjoukko</u> $\mathcal{D}(R)$ parempi ongelman analysoimiseen

2) <u>Yksikäsitteisyys:</u> Jos $Rf = R\tilde{f}$, onko $f = \tilde{f}$?

3) <u>Rekonstruktioalgoritmi</u> tai -kaava. Miten f saadaan lasketuksi kun Rf on annettu?

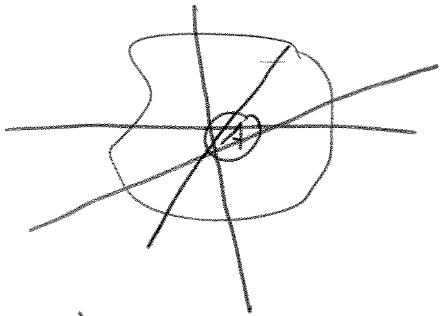
4) <u>Numeerinen ratkaisualgoritmi</u>

5) <u>R:n kuva-avaruus</u>: Mikä on $R(\mathcal{D}(R))$? Tämä on tärkeää jos mittauksessa on kohinaa.

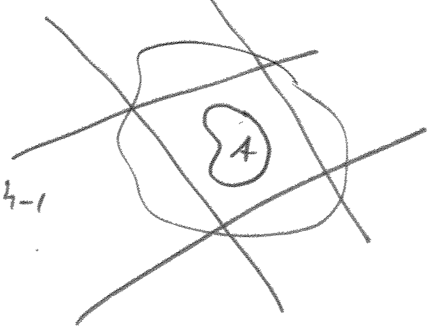
6) <u>Stabiilisuus</u>: Jos $Rf \approx R\tilde{f}$, päteekö $f \approx \tilde{f}$?

<u>Muita kysymyksiä</u>:

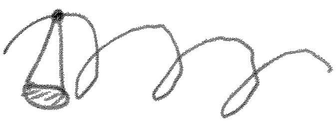
1. $Rf(s,\omega)$ tunnetaan vain alueen $A \subset \mathbb{R}^n$ kanssa leikkaaville $L(s,\omega)$, eli $L(s,\omega) \cap A \neq \emptyset$



2. $Rf(s,\omega)$ tunnetaan vain jos $L(s,\omega) \cap A = \emptyset$



3. $Rf(s,\omega)$ tunnetaan vain pinnalle $(s,\omega) \in \Gamma \subset \mathbb{R} \times S^{n-1}$
Esim. Helikoi-tomogr..



2. Fourier-sarjat ja Fourier-muunnos

Merkintöjä: Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mitallinen, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin

1) $$\operatorname{supp}(f) = \left(\bigcup \left\{ A \subset \Omega \;\middle|\; \begin{array}{l} A \text{ avoin} \\ f = 0 \text{ melkein kaikkialla A:ssa} \end{array} \right\} \right)^c$$

Jos f on jvq,

$$\operatorname{supp}(f) = \operatorname{cl}_\Omega \left(\{ x \in \Omega \mid f(x) \neq 0 \} \right)$$

2) $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on multi-indeksi

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j \,,$$

$$x^\alpha = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \,, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$0^0 = 1$$

3) $$D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j} \,, \qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\partial^\alpha = \prod_{j=1}^n \partial_j^{\alpha_j} \,, \qquad D^\alpha = \prod_{j=1}^n D_j^{\alpha_j}$$

4) $f \in C^\infty(\Omega)$ jos $D^\alpha f \in C(\Omega)$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{ f \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(f) \subset \Omega \text{ on kompakti.} \}$$

Fourier-sarjat

(kertausta, kts. Funktionaalianalyysin peruskurssi, 2008, tashiner, luku 5
tai Rudin, Real and complex analysis chapters 4) and 9)

Olkoon $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Funktio f voidaan ajatella $\mathbb{R}$:n 2π-periodisena funktiona. f:n Fourier-kertoimet ovat

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

$$= \langle f, e_n \rangle_{L^2}, \quad \text{missä}$$

$$e_n(x) = e^{inx}, \qquad \langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

Funktion f Fourier-sarja on (avaruutta, jossa suppeneminen tapahtuu, spesifioimatta)

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e_n(x) = \lim_{N\to\infty} S_N f(x),$$

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e_n(x)$$

Kerrataan Eulerin kaava: $e^{a+ib} = e^{a}(\cos b + i \sin b)$,

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Koska

$$\langle e_n, e_m \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{+imx}} \, dx = \begin{cases} 2\pi, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$= 2\pi \delta_{nm},$$

ovat

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_n(x)$ ortonormaaleja $L^2(-\pi,\pi)$:ssä.

<u>Lause 2.1</u> $\operatorname{span}\left\{\frac{1}{2\pi} e_n\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ on tiheä $L^2(-\pi,\pi)$:ssä

<u>Seuraus:</u> Koska

$$S_N f = \sum_{n=-N}^{N} \left\langle f, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\rangle_{L^2} \frac{e_n}{\|e_n\|},$$

on ortonormaali projektio $S_n : L^2(-\pi,\pi) \to sp\{e_n \mid |n| \leq N\}$, pätee

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x) \qquad L^2(-\pi,\pi)\text{:ssä}$$

Siis $L^2(-\pi,\pi)$:ssä

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{inx}.$$

Lisäksi

$$\|f\|_{L^2}^2 = \langle f, f\rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\hat{f}(n) e_n, \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\hat{f}(m) e_m \right\rangle_{L^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, \overline{\hat{f}(m)}\, 2\pi\, \delta_{nm} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

ja kun $\|(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$, on kuvaus

$$F : L^2(-\pi,\pi) \to \ell^2 = \{(a_n)_{n=-\infty}^{\infty} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$$

$$f \mapsto (\hat{f}(n))_{n=-\infty}^{\infty}$$

isomorfismi, jolle

$$\|Ff\|_{\ell^2} = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}.$$

n-ulotteisessa joukossa $\Omega = (-\pi, \pi)^n \subset \mathbb{R}^n$, (tai toruksella $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$), funktiolle $f \in L^2(\Omega)$ pätee

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(q)\, e_q(x), \quad L^2(\Omega):\text{ssa}$$

$$e_q(x) = e^{iq\cdot x}, \quad q\cdot x = q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n$$

$$\hat{f}(q) = \langle f, e_q \rangle_{L^2} = \int_\Omega f(x)\, e^{-iq\cdot x}\, dx$$

"Harjoitustehtävä": Käy läpi Funktionaalianalyysin perusteiden kurssin luku 5 ja tarkista asia.

Suora lasku osoittaa funktiolle $f \in C_0^\infty(-\pi,\pi)$

$$\widehat{Df}(n) = F\left(-i\frac{d}{dx}f\right)(n)$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} (-i\tfrac{d}{dx})f(x)\, e^{-inx}\, dx$$
$$= -\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, (-i\tfrac{d}{dx})\, e^{-inx}\, dx$$
$$= n\,\hat{f}(n).$$

Yleisesti, kun $f \in C_0^\infty((-\pi,\pi)^q)$, $F(D^\beta f)(q) = q^\beta \hat{f}(q)$.

Muuttamalla väli $(-\pi,\pi)$ väliksi $(-L,L)$, $L>0$ edelliset kaavat skaalautuvat kaavaksi

$f \in L^2(-L,L) \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-L}^{L} f(z)e^{-i\frac{\pi}{L}nz}\,dz\right] e^{i\frac{\pi}{L}nx}\,\frac{\pi}{L} \quad L^2(-L,L)\text{:ssä}$$

Kun $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ja $L \to \infty$ tämä lähestyy formaalisti lauseketta

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,e^{-i\xi z}\,dz\right] e^{i\xi z}\,d\xi.$$

Seuraavassa tätä tutkitaan tarkasti.

[redacted] Nopeasti vähenevät funktiot

<u>Määr 2.1</u> Sanomme, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ nopeasti vähenevä, tai f on Schwartzin luokan funktio, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jos $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

<u>Määr 2.2</u> Sanomme, että

$$\lim_{j\to\infty} f_j = f \qquad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\text{:ssä},$$

jos kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_{\alpha,\beta} = 0$$

Note that

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^N |\partial_x^\beta f(x)| \leq \sum_{|\alpha| \leq 2N} 2^N \|f\|_{\alpha,\beta}$$

2

Määr. 2.3 Funktion $f \in S(\mathbb{R}^n)$ Fourier-muunnos on

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi} f(\xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx \quad , \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Lause 2.4 Kun $f \in S(\mathbb{R}^n)$, pätee

1) $\mathcal{F}_{x\mapsto\xi}(D_x^\alpha f) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

2) $\mathcal{F}_{x\to\xi}(x^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

3) $\mathcal{F}(f(ax)) = a^{-n} \hat{f}(\frac{\xi}{a})$, $\mathcal{F}(e^{ib\cdot x} f(x)) = \hat{f}(\xi - b)$

4) $\mathcal{F}_{x\to\xi} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ on jatkuva.

Tod 1):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1} f(x)\, e^{-ix\cdot\xi} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]^n} \partial_{x_1} f \cdot e^{-ix\cdot\xi} dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \Big[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x^1, x^2, \dots, x^n)\, e^{-ix\cdot\xi} dx_2 \dots dx_n \Big]_{x_1=-R}^{R}$$

$$+ \int_{[-R,R]^n} f(x) \left(-\partial_{x_1} e^{-ix\cdot\xi}\right) dx$$

$$= 0 + \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(i\xi_1 e^{ix\cdot\xi} \right) dx$$

$$= i\xi_1 \hat{f}(\xi).$$

Näin saadaan $\mathcal{F}(D_{x_1} f) = \xi_1 \hat{f}(\xi)$,

Js.... 1) seuraa vastaavilla laskuilla.

2) todistetaan samaan tapaan.

3) : HT

4) $$\| \mathcal{F} f \|_{\alpha,\beta} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} | \xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f}(\xi) |$$

$$= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \mathcal{F} \left(D_x^\alpha (x^\beta f) \right)(\xi) \right|.$$

Lisäksi,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^n} (1+|x|^2)^n |f(x)|\, dx$$

$$\leq \left\| \frac{1}{(1+|x|^2)^n} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \sum_{|\alpha| \leq 2n} \| f \|_{\alpha,0}.$$

Yhdistämällä nämä estimaatit, saamme

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} \leq C_{\alpha,\beta} \sum_{\substack{|\tilde{\alpha}| \leq |\beta|+2n \\ |\tilde{\beta}| \leq |\alpha|+2n}} \|f\|_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} .$$

Siispä jos $f_k, f \in S(\mathbb{R}^n)$ ja $\forall\, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{N}^n$ pätee

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = 0$$

niin kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$\lim_{k\to\infty} \|\hat{f}_k - \hat{f}\|_{\alpha,\beta} = 0 .$$

Tämä tarkoittaa sitä, että

$$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$$

on jatkuva kun $S(\mathbb{R}^n)$ varustetaan normien $(\|\cdot\|_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}$ määräämällä topologialla.

Lause 2.5 $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ on bijektio ja

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}h)(x) = (2\pi)^n Jh(x),$$

missä $Jh(x) = h(-x)$. Siispä

$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} J \circ \mathcal{F}$$

Tod. On tunnettua (ks. Rudin ch 9) että funktion $\phi(x) = \exp(-\frac{|x|^2}{2})$ Fourier muunnos on $\hat{\phi}(\xi) = (\sqrt{2\pi})^n \phi(\xi)$.

Tämä nähdään seuraavasti kun $n=1$. Funktio $\phi(x)$ toteuttaa

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\phi(x) = 0.$$

Ottamalla puolittain Fourier-muunnoksen, saamme

$$\left(i\xi + i\frac{d}{d\xi}\right)\hat{\phi}(\xi) = 0$$

Siispä sekä $\phi(z)$ että $\hat{\phi}(z)$ toteuttavat yhtälön

$$\frac{df}{dz}(z) = -z f(z) \quad , \quad z \in \mathbb{R} ,$$

Koska tälle yhtälölle on vain yksi lineaarisesti riippumaton ratkaisu, on olemassa $c \in \mathbb{C}$ siten, että

$$\hat{\phi}(z) = c \cdot \phi(z) .$$

Todistus sille, että $c = (\sqrt{2\pi})^n$ löytyy Rudinin kirjasta.

Olkoon $\quad \phi_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad , \quad \varepsilon > 0$

Tällöin

$$\hat{\phi}_\varepsilon(\xi) = \phi(\varepsilon \xi) .$$

Lisäksi, kun $f, h \in S(\mathbb{R}^n)$, nähdään (HT), että funktio

$$h * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-z) f(z)\, dz$$

toteuttaa $h * f \in S(\mathbb{R}^n)$ ja (HT)

$$\widehat{h * f}(\xi) = \hat{h}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi).$$

Samoin, kun $h \in S(\mathbb{R}^n)$, niin pätee (HT)
$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x)\, dx = 1$ ja

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h * \phi_\varepsilon(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right) h(z)\, dz = h(x)$$

kaikille $x \in \mathbb{R}^n$.

Lisäksi, kun $f, h \in S(\mathbb{R}^n)$, niin (HT)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z) \hat{g}(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(z) g(z)\, dz.$$

Kiinnitetään nyt $x \in \mathbb{R}^n$ ja merkitään

$$g_{x,\varepsilon}(\xi) = \underbrace{e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^2}}_{=\hat{\phi}_\varepsilon(\xi)} \cdot e^{ix\cdot\xi} \, (2\pi)^{-n/2}$$

Koska $|\widehat{g_{x,\varepsilon}}(\xi)| \leq 1$, $\hat{h} \in S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, Lebesguen dominoidun konvergenssilauseen (LDC) nojalla

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x} \hat{h}(\xi)\, d\xi \overset{\text{LDC}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} g_{x,\varepsilon}(\xi)\, \hat{h}(\xi)\, d\xi$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_{x,\varepsilon}(z)\, h(z)\, dz$$

$$\overset{\oplus}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{n/2} \varepsilon^{-n} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}|z-x|^2} h(z)\, dz$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-z)\, h(z)\, dz = h(x).$$

Siis $\mathcal{J}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(h))) = h$. ∇

$\oplus$ $\mathcal{F}_{\xi\to z}\left(e^{-1/2|\varepsilon\xi|^2}\right) = (2\pi)^{n/2} \varepsilon^{-n} e^{-|\frac{z}{\varepsilon}|^2/2}$

$\mathcal{F}_{\xi\to z}\left(e^{ix\cdot\xi} p(\xi)\right) = \hat{p}(z-x)$

Lause 2.5 (Parsevalin kaava). Kun $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, \overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi \qquad (1)$$

Tod. Fubinin lauseen nojalla

$$(\hat{f}, h)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, \overline{h(\xi)}\, dx\, d\xi$$

$$= (f, \hat{h}(-\xi))_{L^2} = (f, J\hat{h})_{L^2}$$

Sijoittamalla $h = \hat{g}$, jolloin $J\hat{h} = \frac{1}{(2\pi)^n} g$.

saamme kaavan (1). $\square$

Seuraus: Kun $f \in S(\mathbb{R}^n)$, pätee

(1) $$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Koska $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ ja $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ on tiheä avaruudessa $L^2(\mathbb{R}^n)$, voidaan Fourier muunnos laajentaa yksikäsitteisellä tavalla jatkuvaksi lineaarikuvaukseksi

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n).$$

Tämä tehdään seuraavasti: Jos $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on olemassa $f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ s.e.

$$\lim_{j\to\infty} f_j = h.$$

Tällöin $(f_j)_{j=1}^\infty$ on L^2:n Cauchy-jono, el.

$$\lim_{j,k\to\infty} \|f_j - f_k\|_{L^2} = 0$$

Kaavan (1) nojalla

$$\lim_{j,k\to\infty} \|\hat{f}_j - \hat{f}_k\|_{L^2} = 0,$$

el. $(\hat{f}_j)_{j=1}^\infty$ on Cauchy-jono $L^2(\mathbb{R}^n)$:ssä

Tällöin on $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, jolla

$$g = \lim_{j\to\infty} \hat{f}_j .$$

Määrittelemme $\hat{h} = \mathcal{F} h = g$. Tällöin g on riippumaton funktiota h vastaavan Cauchy-jonon (f_j) valinnasta, ja

$$\|\hat{h}\|_{L^2} = \lim_{j\to\infty} \|\hat{f}_j\|_{L^2} = \lim_{j\to\infty} (2\pi)^{n/2} \|f_j\|_{L^2} \tag{2}$$

$$= (2\pi)^{n/2} \|h\|$$

Siis olemme määritelleet kuvauksen

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \tag{3}$$

jolla (2) pätee. Koska $J : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ on jatkuva, nähdään että

$$(2\pi)^{-n} J \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}\, h = h ,$$

eli koska $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} J \circ \mathcal{F}$ pätee (3):lla.