

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I (opettajalinjan työpaja)

Harjoitus 2

Käydään läpi pe 16.09.2011

Joihinkin tehtäviin löytyy vihjeitä sivun alareunasta. Jokaista tehtävää on mitettävä vähintään 10 minuttia (kellosta!) ennen kuin katsoo vinkkiä.

1. (1:5) Todista, että $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ on normi \mathbb{R}^n :ssä. Tässä $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
2. Piirrä pallot $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 < 1\}$ ja $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty < 1\}$ missä $\|x\|_1$ on kuten edellisessä tehtävässä ja $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.
3. Olkoon X jokin kokoelma äärellisiä joukkoja. Kun $x, y \in X$, määritellään $d(x, y) = \#(x \triangle y)$, missä $x \triangle y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ on joukkojen symmetrinen erotus. Osoita, että d on metriikka X :ssä.
4. Anna esimerkki funktiosta $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ joka ei ole metriikka, mutta joka toteuttaa metriikan ehdot M2 ja M3.
5. Pidetään tunnettuna, että kaava $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ määrittelee metriikan jatkuvien funktioiden avaruudessa $C[0, 1]$. Päteekö tässä avaruudessa $(C[0, 1], d)$ että $f \in B(\bar{0}, 1)$, kun $\bar{0}$ on funktio joka on identtisesti nolla ja
 - (a) $f(x) = x^2$,
 - (b) $f(x) = 1$?
6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $x \in X$ ja $r_1 < r_2$ positiivisia reaalinumeroita. Osoita, että $B(x, r_1) \subset B(x, r_2)$ ja anna esimerkki tilanteista, joissa (a) $B(x, r_1) = B(x, r_2)$, (b) $B(x, r_1) \neq B(x, r_2)$.

Vihjeet

Tehtävä 3: Voi olla avuksi näyttää, että $x \triangle z \subset (x \triangle y) \cup (y \triangle z)$ ja tietysti $\#(A \cup B) \leq \#A + \#B$.