

Topologia III

Harj. 13 (15.12.2011)

1. Sanomme, että peite $(V_j)_{j \in J}$ on peitteen $(U_i)_{i \in I}$ tarkka tiheys, jos $J = I$ ja $V_j \subset U_j \forall j \in J$. Osoita, että parakompaktin avaruuden jokaisella avoimella peitteellä on tarkka avoin lokaalisti äärellinen tiheys.

2. a) Olk., että X ja C ovat top. avaruuksia, C kompakti, ja $\varphi: X \times C \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että kaavan

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max_{c \in C} \varphi(x, c)$$

määrittelemä funktio on jatkuva.

(Vihje: [Väisälä, Laue 15.24] on hyödyllinen (ei välttämätön))

b) Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jolla $\max_{y \in \mathbb{R}} \varphi(x, y)$ on olemassa jokaisella $x \in \mathbb{R}$, mutta funktio

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} \varphi(x, y)$$

ei ole jatkuva.

3. (Luennot, s. 70 alalaita)

Osoita, että funktiot \bar{f} ja $\bar{g}: B \rightarrow C$ ovat homotooppiset.

4. (Vrt. Luennot, Huom. 5.18)

Olkoot $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ ja $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ lokaalisti kompakteja avaruuksia.

Varustetaan $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ja $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ rajatopologialla.

Osoita, että kanteerisen tulon $A \times B$ tulotopologia on sama kuin jonon $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2 \subset \dots$ antama rajatopologia.

5. (Luennot, s. 76)

Osoita funktoriaalimusehdot $\text{Vect}_n(\text{id}) = \text{id}$, $\text{Vect}_n(f \circ g) = \text{Vect}_n(g) \circ \text{Vect}_n(f)$.

6. (Luennot, s. 77)

Osoita funktoriaalisuus ehdot $[[\text{id}], G_n] = \text{id}$, $[[f] \circ [h], G_n] = [[h], G_n] \circ [[f], G_n]$.

7. Vastaa kurssikyselyyn weboodissa 20.12.2011 mennessä.