**Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 3, 27.2.2012**

Kaikissa yehtävissä $\xi$ kuvaa vuotuista tappiota ja $c$ on tämän kumulantit generoiva funktio. Tarkastellaan satunnaiskulkua $\{Y_n\}$, jonka lisäykset ovat samoin jakautuneita kuin $\xi$. Oletetaan, että Lundbergin eksponentti $R$ on positiivinen ja äärellinen ja että $c(s) < \infty$ jollain $s > R$. Olkoon $U_0$ alkupääoma ja $T(U_0)$ vararikkohetki.

1. Olkoon $\xi$:n jakauma aritmeettinen jänteenä $a$. Tarkastellaan satunnaiskulkua $\{Y_n\}$, jonka lisäyksillä on $\xi$:n konjugaattijakauma parametrilla $R$. Osoita, että ylitteen $Y_{T(0)}$ jakauma on aritmeettinen jänteenä $a$.

2. Oletetaan, että $\xi$:n jakauma ei ole aritmeettinen. Tarkastellaan satunnaiskulkua $\{Y_n\}$, jonka lisäyksillä on $\xi$:n konjugaattijakauma parametrilla $R$. Osoita, että ylitteen $Y_{T(0)}$ jakauma ei ole aritmeettinen.

3. Olkoon $\xi$:n jakauma aritmeettinen jänteenä $a$ ja $N \in \mathbb{N}$ kiinteä. Merkitään

$$G_{U_0}(x) = \mathbb{P}_R\left(Y_{T(U_0)} - U_0 \le x\right), \quad x > 0.$$

Olkoon $\mu_R = \mathbb{E}_R\left(Y_{T(0)}\right)$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} G_{na}(Na) = \frac{a}{\mu_R}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}_R\left(Y_{T(0)} > na\right).$$

**Huom.** Aritmeettisen jakauman tapauksessa uusiutumislauseen korrekti muoto on

$$\lim_{n\to\infty} Z(x+na) = \frac{a}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty} z(x+ka).$$

Summa oikella puolella alkaa siis indeksistä 0 (eikä indeksistä 1, kuten luennoissa on esitetty).

4. (jatkoa) Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_R\left(e^{-R\left(Y_{T(na)}-na\right)}\right) = \frac{a}{\mu_R}\sum_{N=1}^{\infty} e^{-RNa}\mathbb{P}_R\left(Y_{T(0)} > (N-1)a\right).$$

5. (jatkoa) Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} e^{Rna}\,\mathbb{P}(T(na) < \infty) = \frac{a\mathbb{P}(T(0) = \infty)}{\mu_R\left(e^{Ra} - 1\right)}.$$