

Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 3, 27.2.2012

Kaikissa tehtävissä ξ kuvaa vuotuista tappiota ja c on tämän kumulanttien generoiva funktio. Tarkastellaan satunnaiskulkua $\{Y_n\}$, jonka lisäykset ovat samoin jakautuneita kuin ξ . Oletetaan, että Lundbergin eksponentti R on positiivinen ja äärellinen ja että $c(s) < \infty$ jollain $s > R$. Olkoon U_0 alkupääoma ja $T(U_0)$ vararikkohetki.

1. Olkoon ξ :n jakauma aritmeettinen jänteenä a . Tarkastellaan satunnaiskulkua $\{Y_n\}$, jonka lisäyksillä on ξ :n konjugaattijakauma parametrilla R . Osoita, että ylitteen $Y_{T(0)}$ jakauma on aritmeettinen jänteenä a .

2. Oletetaan, että ξ :n jakauma ei ole aritmeettinen. Tarkastellaan satunnaiskulkua $\{Y_n\}$, jonka lisäyksillä on ξ :n konjugaattijakauma parametrilla R . Osoita, että ylitteen $Y_{T(0)}$ jakauma ei ole aritmeettinen.

3. Olkoon ξ :n jakauma aritmeettinen jänteenä a ja $N \in \mathbb{N}$ kiinteä. Merkitään

$$G_{U_0}(x) = \mathbb{P}_R(Y_{T(U_0)} - U_0 \leq x), \quad x > 0.$$

Olkoon $\mu_R = \mathbb{E}_R(Y_{T(0)})$. Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{na}(Na) = \frac{a}{\mu_R} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}_R(Y_{T(0)} > na).$$

Huom. Aritmeettisen jakauman tapauksessa uusiutumislauseen korrekti muoto on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z(x + na) = \frac{a}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} z(x + ka).$$

Summa oikealla puolella alkaa siis indeksistä 0 (eikä indeksistä 1, kuten luennoissa on esitetty).

4. (jatkoa) Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_R(e^{-R(Y_{T(na)} - na)}) = \frac{a}{\mu_R} \sum_{N=1}^{\infty} e^{-RN a} \mathbb{P}_R(Y_{T(0)} > (N-1)a).$$

5. (jatkoa) Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{Rna} \mathbb{P}(T(na) < \infty) = \frac{a \mathbb{P}(T(0) = \infty)}{\mu_R (e^{Ra} - 1)}.$$