

## Topologia II – Harjoitus 1 (23. 1. 2012)

1. Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus. Topologia I:ssä on määritelty, että joukko  $A \subset X$  on avoin, jos jokaista  $x \in A$  kohti on olemassa sellainen  $r > 0$ , että avoin kuula  $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$  sisältyy  $A$ :han. Olkoon  $\mathcal{T}_d$  tällaisten avointen joukkojen  $A$  kokoelma. Tarkista (kertaa Topologia I:stä), että  $\mathcal{T}_d$  täyttää  $X$ :n topologialta vaadittavat ehdot (T1)–(T3).
2. Todista (kertaa Topologia I:stä) oppikirjan lauseen 1.12 kohdat (6)–(9). Käytä hyväksi määritelmiä ja kohtia (1)–(5).
3. Olkoon  $X$  joukko ja  $(\mathcal{T}_j)_{j \in J}$  perhe  $X$ :n topologioita, jossa indeksijoukko  $J$  on epätyhjä. Näytä, että  $\mathcal{T} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{T}_j$  on  $X$ :n topologia. (Väisälä 1:1)
4. Oletetaan, että  $U \subset \mathbb{R}$  on epätyhjä avoin joukko ja  $x \in \mathbb{R} \setminus U$ . Onko mahdollista, että yhdiste  $U \cup \{x\}$  on a) avoin mutta ei suljettu, b) suljettu mutta ei avoin, c) avoin ja suljettu? Kussakin kohdassa anna esimerkki vaaditunlaisista  $U$  ja  $x$  tai perustele, että tilanne ei ole mahdollinen. Tässä – kuten aina oletusarvoisesti –  $\mathbb{R}$  varustetaan tavallisella topologiallaan.
5. Olkoon  $X$  epätyhjä joukko ja

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X \setminus A \text{ on äärellinen}\}.$$

Näytä, että  $\mathcal{T}$  on  $X$ :n topologia (ns. *kofiniitti topologia*). Näytä lisäksi, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä: i)  $X$  on äärellinen, ii)  $(X, \mathcal{T})$  on diskreetti, iii)  $(X, \mathcal{T})$  on Hausdorff. (Vrt. Väisälä 1:3)

6. Varustetaan joukko  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  edellisen tehtävän topologialla. Määritä  $\text{int } A$  ja  $\overline{A}$  avaruudessa  $\mathbb{N}$ , kun a)  $A = \{1, 2\}$  ja b)  $A = \{1, 3, 5, \dots\}$  (parittomat luvut).

**Lisäpisteitä** (kurssikoepisteiden jatkoksi) saa tehtävien ratkaisemisesta 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 tai 8, jos ratkaisee vastaavasti 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 tai 90 prosenttia annetuista tehtävistä. Pisteiden saanti edellyttää läsnäoloa harjoitusryhmässä ja valmiutta esittää ratkaisu taululla.

**Kurssikokeista** saa enintään 20 + 20 pistettä, ja välttämätön ehto hyväksyttävälle suoritukselle on, että kummastakin kokeesta saa ainakin 7 pistettä. Kokeiden ajankohdat ilmoitetaan lähiaikoina.