

Moniulotteiset aikasarjat sl 2011, HT 4, viikko 48

1. Osoita oikeaksi seuraavat derivointikaavat, joissa x on $n \times 1$ vektori (ks. Liite A.7). Kolmatta kaavaa käytetään derivoitaessa (normaalisesta) VAR(p)-mallista johdettua log-uskottavuusfunktiota.

(i) $\partial a'x / \partial x = a$ (a $n \times 1$)

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} x'Ax &= (A + A')x \\ &= 2Ax, \quad \text{kun } A = A' \quad (A \text{ } n \times n). \end{aligned}$$

(iii) Kun $B = B'$ ja dimensiot ovat laskutoimituksiin sopivat,

$$\frac{\partial}{\partial x} (c - Ax)' B (c - Ax) = -2A' Bc + 2A' B A x.$$

2. Tarkastellaan kaksiulotteisesta stationaarisesta prosessista $y_t = (y_{1t}, y_{2t})$ saatua realisaatiota y_1, \dots, y_T . Oletetaan, että komponenttiprosesseista y_{1t} ja y_{2t} tiedetään, että $y_{it} \sim \text{iid} (\mu_i, \omega_i^2)$ ($i = 1, 2$). Hyödyntäen tätä tietoa johda pelkästään ristikorrelaatioestimaattoreihin $r_{12,k}$, $k = -K, \dots, K$ perustuva asymptoottisesti χ^2 -jakautunut testi nollahypoteesille, joka väittää, että y_{1t} ja y_{2t} ovat riippumattomia iid-prosesseja.

Vihje: Monisteen s. 20 ja tulos $X'X = \sum_{i=1}^m X_i^2 \sim \chi_m^2$, kun $X = (X_1, \dots, X_m)$ ja X_1, \dots, X_m ovat riippumattomia ja $N(0, 1)$ -jakautuneita.

3. Edellisen tehtävän testi voidaan tehdä realistisemmaksi seuraavasti. Oletetaan, että y_{1t} :n ja y_{2t} :n tiedetään olevan ARMA-prosesseja, joiden asteet tunnetaan (käytännössä selvitetään aineistoa käyttäen). Estimoidaan nämä ARMA-prosessit SU-menetelmällä ja lasketaan residuaalit $\hat{\varepsilon}_{1t}$ ja $\hat{\varepsilon}_{2t}$, jotka toteuttavat likimain edellisessä tehtävässä prosesseilta y_{1t} ja y_{2t} vaaditut iid-ominaisuudet. Voidaan osoittaa, että prosessien y_{1t} ja y_{2t} ollessa riippumattomat näistä residuaaleista lasketuilla ristikorrelaatioestimaattoreilla on monisteen s. 20 mainitut asymptoottiset ominaisuudet, joten edellisen tehtävän testiä voidaan soveltaa residuaaleihin $\hat{\varepsilon}_{1t}$ ja $\hat{\varepsilon}_{2t}$ ja tutkia näin prosessien y_{1t} ja y_{2t} riippumattomuutta.

Monisteen Kuvion 3.1 aikasarjoille $dexch_t$ (y_{1t}) ja $rdif_t$ (y_{2t}) havaittiin AR(2)-mallit riittäviksi ja niiden residuaaleista laskettiin seuraavat ristikorrelaatiot ($T = 131$).

k	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	
$r_{12,k}$	0.03	-0.22	-0.12	0.17	-0.19	0.11	0.12	0.05	0.07	-0.01	
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_{12,k}$	-0.26	0.16	0.04	-0.15	0.05	-0.01	-0.07	0.15	-0.08	-0.15	0.11

Tutki voidaanko muuttujien $dexh_t$ ja $rdif_t$ välisiä ristikorrelaatioita pitää nollina. Käytä edellisen tehtävän testiä (jollain K :n arvolla) ja arvioi riippuvuutta myös yksittäisten ristikorrelaatioestimaattien avulla.

4. Osoita, että monisteen yhtälössä (4.3) esiintyvän parametrimatriisin Π SU-estimaattori on

$$\hat{\Pi} = \sum_{t=1}^T y_t x_t' \left(\sum_{t=1}^T x_t x_t' \right)^{-1}.$$

Esitä tämä estimaattori myös käyttäen matriiseja $\mathbf{Y}' = [y_1 : \dots : y_T]$ ($n \times T$) ja $\mathbf{X}' = [x_1 : \dots : x_T]$ ($(np + 1) \times T$). Osoita lisäksi, että $\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t x_t' = 0$, kun $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\Pi}x_t$.