

## Moniulotteiset aikasarjat kl 2011, HT 2, viikko 46

1. Olkoon matriisi  $\mathbf{A}$  kuten HT:ssä 1.4 (tai monisteen s. 8). Osoita (determinanttiin perustuvan ominaisarvoyhtälön ja determinantin ominaisuuksien avulla), että  $\mathbf{A}$ :n kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykköistä pienempiä jos ja vain jos monisteen ehto (2.9) pätee eli

$$\det(I_{np} - \mathbf{A}z) \neq 0, \quad |z| \leq 1 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

2. Jatkoa HT:lle 1.4. Osoita, että monisteen ehdot (2.9) ja (2.13) ovat yhtäpitäviä.

3. Oletetaan, että  $n \times n$  matriisin  $A$  ominaisarvot  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ovat erisuuria ja itseisarvoltaan ykköistä pienempiä eli  $|\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, n$ . Osoita HT:ää 1.3 käyttäen, että tällöin sarjat  $\sum_{j=0}^{\infty} A^j$  ja  $\sum_{j=0}^{\infty} \|A^j\|$  suppenevat ja lisäksi, että  $\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I_n - A)^{-1}$ .

*Huom.:* Kun suppeneminen on todettu, voidaan tulos  $\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I_n - A)^{-1}$  todeta helposti myös ilman oletusta ominaisarvojen erisuuruudesta. Suppeneminen voidaan puolestaan todeta ilman tätä oletusta käyttäen matriisin  $A$  Jordanin hajotelmaa (ks. Liite A.2), mutta perustelusta tulee jonkin verran hankalampi. Kompleksiset ominaisarvot eivät aiheuta hankaluuksia, sillä niissä voidaan tarkastella reaali- ja imaginaariosia erikseen.

4. Ratkaise monisteen s. 12 johdetuista Yule-Walker -yhtälöistä

$$\Gamma'_k = A_1 \Gamma'_{k-1} + \dots + A_p \Gamma'_{k-p}, \quad k > 0,$$

kerroinmatriisit  $A_1, \dots, A_p$  kovarianssimatriisien  $\Gamma'_0, \dots, \Gamma'_p$  funktiona.

*Huom.:* Kun monisteen s. 12 puhutaan Yule-Walker -yhtälöiden jälkeen kovarianssimatriiseista  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{p-1}$ , olisi selkeämpää puhua niiden transpooseista  $\Gamma'_0, \dots, \Gamma'_{p-1}$  (tai yhtäpitävästi kovarianssimatriiseista  $\Gamma_0, \Gamma_{-1}, \dots, \Gamma_{-p+1}$ ), jotka esiintyvät Yule-Walker -yhtälöissä. Vastaava pätee s. 13 viimeisellä rivillä ennen otsikkoa "VAR(p)-prosessin ennustaminen" sanottuun. (Yule-Walker -yhtälöt voidaan tietysti perustaa myös yhtälöihin  $\Gamma_{-k} = A_1 \Gamma_{1-k} + \dots + A_p \Gamma_{p-k}, k > 0$ .)