

Todennäköisyyslaskennan kurssi, 9. harjoitus (29.11.–2.12.2011)

1. Tarkastelemme uudestaan 7. harjoitusten tehtävissä 2 ja 3 käsitellyä jatkuvaa yhteisjakaumaa, jonka yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}xy, \quad 0 < x < y < 2$$

- a) Laske ehdollinen odotusarvo $E[Y | X]$ sekä satunnaismuuttujan Y paras lineaarinen ennuste satunnaismuuttujan X avulla (ks. jakson 6.9 kaava (6.3)).
- b) Laske ehdollinen odotusarvo $E[X | Y]$ sekä satunnaismuuttujan X paras lineaarinen ennuste satunnaismuuttujan Y avulla.

2. Olkoon $h(X)$ mielivaltainen sm:n X funktio, ja olkoon $m(X) = E(g(X, Y) | X)$. Todista, että

$$E[(g(X, Y) - h(X))^2] = E[(g(X, Y) - m(X))^2] + E[(m(X) - h(X))^2],$$

ja päätele tästä, että sm:n $g(X, Y)$ paras ennuste sm:n X funktiona keskineliövirheen mielessä on ehdollinen odotusarvo $m(X) = E[g(X, Y) | X]$ (ts. todista lause 7.2). Opastus: kerro binomi auki kaavassa

$$E[(g(X, Y) - h(X))^2] = E[(g(X, Y) - m(X) + m(X) - h(X))^2],$$

ja käytä ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia (lause 7.3 ja kaava (7.6)).

3. Todista lauseen 7.4 tulos: $\text{var}(g(X, Y)) = E \text{var}(g(X, Y) | X) + \text{var} E(g(X, Y) | X)$.

4. Oletetaan, että

$$Y | X \sim N(m(X), (1 - \rho^2)\sigma_Y^2), \\ X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2),$$

jossa $\mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}$, $\sigma_X, \sigma_Y > 0$ ja $-1 < \rho < 1$ ovat vakioita. Regressiofunktiolle $m(x)$ oletetaan esimerkin 7.6 muoto, eli

$$m(x) = E(Y | X = x) = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X).$$

Osoita, että yhteistiheys $f_{X,Y}$ voidaan kirjoittaa esimerkissä 7.6 ilmoitettuun kaksiulotteisen normaalijakauman muotoon (alin kaava s. 108).

Opastus: Matriisi \mathbf{C} voidaan kääntää symbolisesti; kun \mathbf{A} on 2×2 -matriisi, eli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{niin} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{jossa} \quad \det \mathbf{A} = ad - bc.$$

5. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$X | Y \sim \text{Poi}(\lambda Y) \\ Y \sim \text{Gam}(s, s),$$

jossa $\lambda, s > 0$ ovat vakioita. X :n jakauma on diskreetti ja Y :n jatkuva. Y :n tiheysfunktio, odotusarvo ja varianssi löytyvät jaksosta 4.3.4.

- a) Kirjoita yhteisjakauman tiheys, ja johda siitä X :n reunajakauman ptnf integroimalla. Tulokseksi tulee tietty negatiivinen binomijakauma (ks. jakso 4.1.5). Mitkä ovat sen parametrit?
- b) Laske X :n reunajakauman odotusarvo ja varianssi kaavoilla

$$EX = E[E(X | Y)], \quad \text{var} X = E \text{var}(X | Y) + \text{var} E(X | Y).$$

Tarkista, että johtamasi kaavat ovat sopuinnassa jaksossa 4.1.5 annettujen negatiivisen binomijakauman odotusarvon ja varianssin kaavojen kanssa.