

Algebra I

Luento 31.1.2012
Helsingin yliopisto

Tiedotuksia

- Korjausten tekemiseen on tästä lähin enemmän aikaa, ja korjauksia saa palauttaa useita kertoja.
- Korjausten palautuspäivä on nyt vanhaa palautuspäivää seuraavan viikon keskiviikko.
- Pajassa on välillä ollut ruuhkaa. Asia pyritään korjaamaan.
- Kannattaa myös itse suosia ruuhkattomia aikoja, jos pystyy.

Aliryhmän määritelmä

Oletetaan, että (G, \cdot) on ryhmä ja $H \subset G$. Pari (H, \cdot) on ryhmän (G, \cdot) aliryhmä, jos

(H1) joukko H on suljettu laskutoimituksen suhteen, eli jos $g, h \in H$, niin $gh \in H$.

(H2) ryhmän G neutraalialkio on joukossa H .

(H3) joukko H sisältää kaikkien alkoidensa käänteisalkiot eli $g^{-1} \in H$ kaikilla $g \in H$.

Tällöin merkitään $(H, \cdot) \leq (G, \cdot)$ tai lyhyemmin $H \leq G$

Esimerkki aliryhmästä

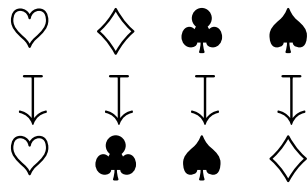
- Ryhmällä $(\mathbb{Z}, +)$ on aliryhmä $3\mathbb{Z} = \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Esimerkki aliryhmästä

- Rubikin kuution yhden tahkon kierrot muodostavat Rubikin ryhmän aliryhmän.

Korttipakan sekoittaminen

Korttipakan sekoitusta voi ajatella kuvauksena:



Korttipakan sekoittaminen

- On helpompaa, jos kortteja merkitään numeroilla 1, 2, 3, 4.
- Tällöin saadaan kuvaus

$$\sigma: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\sigma(1) = 1, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 4, \quad \sigma(4) = 2.$$

Permutaatio

- Joukon A permutaatio on bijektiivinen kuvaus joukolta A itselleen.

Permutaation taulukkomuoto

- Permutaatio $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ taulukkomuodossa:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

- Ässien sekoitus taulukkomuodossa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Symmetrinen ryhmä

- Ryhmä (S_A, \circ) on joukon A kaikkien permutaatioiden muodostama ryhmä. Laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen.
- Jos $A = \{1, 2, \dots, n\}$, merkitään $S_A = S_n$.
- Tulot lasketaan oikealta vasemmalle!

Permutaatioiden tulo

- Lasketaan permutaatioiden

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

tulo.

- Permutaatioiden tulo ei ole vaihdannainen laskutoimitus.

Permutaation radat

- Kun permutaatiosta piirtää kuvan, huomaa, että se muodostuu radoista.
- Määritetään permutaation

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

radat.