

Algebra I

Luento 27.3.2012
Helsingin yliopisto

Luennon aiheet

- Polynomit
- Kunnat

Polynomit

Olkoon R vaihdannainen rengas. Yhden tuntemattoman R -kertoimista polynomia ajatellaan äärellisenä summana

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n,$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja $a_k \in R$ kaikilla k .

Kaikkien tällaisten polynomien joukkoa merkitään $R[X]$.

Polynomin määritelmä

Olkoon R vaihdannainen rengas. Tällöin R -kertoiminen polynomi on ääretön jono

$$(a_k) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots),$$

missä $a_k \in R$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja vain äärellisen moni a_k poikkeaa nolasta.

Esimerkikki

\mathbb{Z} -kertoiminen polynomi $-3X^5 + 4X^3 + 5X - 10$ on jono
($-10, 5, 0, 4, 0, -1, 0, 0, \dots$)

Laskutoimitukset jonomerkinöillä

$$(a_k) + (b_k) = (c_k), \quad \text{missä} \quad c_k = a_k + b_k \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N}$$
$$(a_k) \cdot (b_k) = (c_k), \quad \text{missä} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N}.$$

Polynomirengas

Olkoon R vaihdannainen rengas.

Joukko $R[X]$ on rengas, kun laskutoimituksina ovat polynomien yhteen- ja kertolasku.

Polynomin aste

Olkoon $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ polynomi, jolle pätee $a_n \neq 0$.

Lukua n kutsutaan polynomin asteeksi.

Polynomia vastaava polynomikuvaus

Renkaan $R[X]$ polynomista

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

voidaan johtaa kuvaus

$$f_P: R \rightarrow R, \quad f_P(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \cdots + a_nr^n.$$

RENKAAN YKSIKÖT

Jos renkaan alkiolla on käänteisalkio kertolaskun suhteen, alkiota kutsutaan yksiköksi.

Renkaan R yksiköiden joukkoa merkitään R^* .

Esimerkki: \mathbb{Z}_6

\cdot	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	0	0	0	0	0	0
[1]	0	<u>1</u>	2	3	4	5
[2]	0	2	4	0	2	4
[3]	0	3	0	3	0	3
[4]	0	4	2	0	4	2
[5]	0	5	4	3	2	<u>1</u>

Yksikköryhmä

Olkoon R rengas. Tällöin R^* on ryhmä kertolaskun suhteen.

Yksikköryhmä

On osoitettava, että

(G0) Kertolasku on joukon R^* laskutoimitus.

(G1) Kertolasku on liitännäinen.

(G2) Joukossa R^* on kertolaskun neutraalialkio.

(G3) Jokaisella R^* :n alkiolla on käänteisalkio joukossa R^* .

KUNTA

Rengas $R \neq \{0\}$ on kunta, jos se on vaihdannainen ja kaikki nollasta poikkeavat alkiot ovat yksiköitä.