

Algebra I

Luento 18.1.2012
Helsingin yliopisto

Oletetaan, että $*$ on joukon S laskutoimitus.

Liitännäisyys

Laskutoimitus $*$ on *liitännäinen*, jos

$$x * (y * z) = (x * y) * z \quad \text{kaikilla } x, y, z \in S$$

Vaihdannaisuus

Laskutoimitus $*$ on *vaihdannainen*, jos

$$x * y = y * x \quad \text{kaikilla } x, y \in S$$

Neutraalialkio

Joukon S alkioita e kutsutaan *neutraalialkioksi*, jos

$$e * x = x \quad \text{ja} \quad x * e = x \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

Käänteisalkio

Oletetaan, että laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio e .
Olkoon $x \in S$. Alkiota x' kutsutaan alkion x *käänteisalkioksi*, jos

$$x * x' = e \quad \text{ja} \quad x' * x = e.$$

Funktioiden laskutoimitus

Olkoon A joukko.

- Joukko $F(A)$ koostuu funktioista $A \rightarrow A$
- Tässä joukossa kuvausten yhdistäminen \circ on laskutoimitus

Esimerkki 1

Merkitään $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Jakolasku on joukon \mathbb{Q}^* laskutoimitus. Osoitetaan, että laskutoimituksella ei ole neutraalialkiota.

Esimerkki 2

Määritellään luonnollisten lukujen joukossa laskutoimitus $n \oplus m = nm + n + m$. Osoitetaan, että laskutoimitus on liitännäinen ja vaihdannainen.

Olkoot $n, m \in \mathbb{N}$. Huomataan, että

$$n \oplus m = nm + n + m = mn + m + n = m \oplus n.$$

Siis laskutoimitus \oplus on vaihdannainen.

Oletetaan, että $n, m, k \in \mathbb{N}$. Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned}n \oplus (m \oplus k) &= n \oplus (mk + m + k) \\ &= nmk + nm + nk + n + mk + m + k\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}(n \oplus m) \oplus k &= (nm + n + m) \oplus k \\ &= nmk + nk + mk + nm + n + m + k.\end{aligned}$$

Saadut tulokset ovat samat, joten laskutoimitus \oplus on liitännäinen.

Esimerkki 3

Määritellään reaalilukujen joukon laskutoimitus \diamond seuraavasti: jos $a, b \in \mathbb{R}$, niin $a \diamond b = (a + b)/2$.

Ei ole vaikea osoittaa, että laskutoimitus \diamond on vaihdannainen.

Osoitetaan, että laskutoimitus \diamond ei ole liitännäinen. Valitaan esimerkiksi $a = 1$, $b = 2$ ja $c = a \diamond b = 3/2$. Nyt $(1 \diamond 2) \diamond 3/2 = 3/2 \diamond 3/2 = 3/2$, mutta

$$1 \diamond (2 \diamond 3/2) = 1 \diamond (7/4) = 11/8 \neq 3/2.$$

Siten laskutoimitus ei ole liitännäinen.