

Algebra I

Luento 17.1.2012
Helsingin yliopisto

Algebra

- Tutkii laskutoimituksia
- Esimerkkejä laskutoimituksista
 - kokonaislukujen yhteenlasku
 - kokonaislukujen kertolasku
 - matriisien kertolasku

- Joukon S laskutoimitus $*$ on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon S alkiopariin (x, y) jonkin kolmannen alkion joukosta S .
- Toisin sanoen joukon S laskutoimitus $*$ on kuvaus $S \times S \rightarrow S$, jolle pätee $(x, y) \mapsto x * y$.
- Joukkoa S , jossa on määritelty laskutoimitus $*$, voidaan merkitä parina $(S, *)$.

Esimerkkejä laskutoimituksista

- $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$
- (\mathbb{Z}, \cdot) , (\mathbb{Q}, \cdot)
- Luonnollisten lukujen vähennyslasku ei ole laskutoimitus
- Olkoon X joukko. Yhdiste \cup on potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ laskutoimitus, samoin leikkaus \cap ja erotus \setminus
- Funktioiden yhdistäminen on laskutoimitus

Laskutoimituksen ominaisuuksia

- Liitännäisyys (sulkuja ei tarvita)
- Vaihdannaisuus (alkioiden järjestyksen voi vaihtaa)
- Neutraalialkio (alkio, joka ei tee mitään)
- Käänteisalkiot (kuin vastalukuja tai käänteislukuja)

Oletetaan tästä lähtien, että $*$ on joukon S laskutoimitus.

Liitännäisyys

- Laskutoimitus $*$ on *liitännäinen*, jos

$$x * (y * z) = (x * y) * z \quad \text{kaikilla } x, y, z \in S$$

- Jos laskutoimitus on liitännäinen, sulkujen paikalla ei ole väliä
- Esimerkiksi kokonaislukujen yhteenlasku ja kertolasku ovat liitännäisiä
- Kokonaislukujen vähennyslasku ei ole liitännäinen

Vaihdannaisuus

- Laskutoimitus $*$ on *vaihdannainen*, jos

$$x * y = y * x \quad \text{kaikilla } x, y \in S$$

- Jos laskutoimitus on vaihdannainen, alkioden järjestyksen voi vaihtaa
- Esimerkiksi kokonaislukujen yhteenlasku ja kertolasku ovat vaihdannaisia
- Matriisien kertolasku ei ole vaihdannainen laskutoimitus

Neutraalialkio

- Joukon S alkiona e kutsutaan *neutraalialkioksi*, jos

$$e * x = x \quad \text{ja} \quad x * e = x \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

- Neutraalialkio ei tee mitään
- Laskutoimituksen $(\mathbb{Z}, +)$ neutraalialkio on 0 ja laskutoimituksen (\mathbb{Z}, \cdot) neutraalialkio on 1
- Matriisikertolaskun neutraalialkio on ykkösmatriisi

Käänteisalkio

- Oletetaan, että laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio e . Olkoon $x \in S$. Alkiota x' kutsutaan alkion x *käänteisalkioksi*, jos

$$x * x' = e \quad \text{ja} \quad x' * x = e.$$

- Laskutoimituksella $(\mathbb{Z}, +)$ käänteisalkiot vastaavat vastalukuja
- Laskutoimituksella (\mathbb{R}, \cdot) käänteisalkiot vastaavat käänteislukuja