

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2012
Harjoitus 9

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 28.3.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 18.4.2012 klo 18.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä uusia asioita ovat

- Renkaat
- Alirenkaat
- Polynomit

Tehtävä I

- 1.* Ryhmällä $4\mathbb{Z}$ aliryhmä $20\mathbb{Z}$. Määritä sivuluokkien joukko $4\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.
- 2.* Määritä indeksi $[4\mathbb{Z} : 20\mathbb{Z}]$.

Tehtävä II

Mitkä seuraavista ovat renkaita? Jos kyseessä ei ole rengas, mitkä renkaan ehdoista toteutuvat ja mitkä eivät? Voit käyttää hyväksesi aikaisemmin osoitettuja tuloksia.

3. $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$
4. $(\mathbb{Q}_+, +, \cdot)$, missä $\mathbb{Q}_+ = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}$
5. $(\frac{1}{2}\mathbb{Z}, +, \cdot)$, missä $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{a/2 \mid a \in \mathbb{Z}\}$
6. * $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$, missä kokonaislukujen laskutoimitukset \oplus ja \odot määritellään seuraavasti:

$$m \oplus n = m + n + 1 \quad \text{ja} \quad m \odot n = mn + m + n.$$

Tehtävä III

Mitkä seuraavista yhtälöistä pätevät mielivaltaisen renkaan alkioille a ja b ?

7. $a(a - b) - b(a - b) = (a - b)^2$
8. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
9. $2a \cdot 3(-b) + ab = (-5)ab$

Tehtävä IV

Renkaan alkioita kutsutaan yksiköksi, jos sillä on käänteisalkio kertolaskun suhteen.

10. Etsi kaikki renkaiden $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ ja $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ yksiköt.

Tehtävä V

11. Osoita, että Gaussin kokonaislukujen joukko

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

on kompleksilukujen renkaan \mathbb{C} alirengas. Tietoa kompleksiluvuista löytyy tarvittaessa kirjan liitteestä C.

12. Olkoon R rengas. Tutkitaan joukkoa

$$S = \{a \in R \mid ar = ra \text{ kaikilla } r \in R\}.$$

Osoita, että S on renkaan R alirengas.

Tehtävä VI

Lue polynomeja käsittelevä luku 21. (Ne kohdat, joissa puhutaan kokonaisalueista, voi toistaiseksi sivuuttaa.)

13. Määritä polynomirenkaan $\mathbb{R}[X]$ alkioiden $6X^2 - 4X + 1$ ja $2X^3 - X^2 + X$ tulo. Polynomit voidaan tulkita myös renkaan $\mathbb{Z}_4[X]$ alkioiksi. Mikä niiden tuloksi tulee tällöin? Entä silloin, jos polynomit tulkitaan renkaan $\mathbb{Z}_5[X]$ alkioiksi?
14. Kirjoita \mathbb{R} -kertoimiset polynomit $X^3 - 4X$ ja $-X^2 + 2X - 5$ jonoina. Kerro sitten polynomit keskenään käyttäen jonoille määriteltyä kertolaskua. Muuta vielä lopuksi saamasi jono takaisin summaksi.
- 15.* Määritä tehtävässä 13 laskemiesi tulopolynomien asteet.

Tehtävä VII

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain yhden tekemisestä saa lisäpisteen.

16. Määritä ryhmän S_3 aliryhmän $B = \{(1), (12)\}$ oikeat sivuluokat. Vertaa niitä luvussa 10.2 määritettyihin vasempiin sivuluokkiin. Mitä eroavaisuuksia havaitset? Mikä on samanlaista?

17. Olkoon ryhmällä G aliryhmät H ja K , joille pätee $K \leq H \leq G$. Oletetaan lisäksi, että indeksit $[G : H]$ ja $[H : K]$ ovat äärellisiä. Osoita, että $[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$.

Vihje: Mieti, mitkä joukon G/K alkioit voisivat olla.