

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2012
Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 20.1.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 3.2.2012 klo 18.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä asioita ovat

- Laskutoimitukset
- Vaihdannaisuus
- Liitännäisyys
- Neutraalialkio
- Käänteisalkio

Tehtävä I

Joukon S *laskutoimitus* $*$ on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon S alkiopariin (x, y) jonkin yksikäsitteisen kolmannen alkion joukosta S . Tätä alkiota kutsutaan laskutoimituksen tulokseksi ja merkitään $x * y$.

Määritellään joukolle $K_{12} = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ laskutoimitus \oplus , jota kutsutaan *kellotaulusummaksi*: jos $n, m \in K_{12}$, niin $n \oplus m$ on se kellonaika, joka saadaan, kun kellonaikaan n lisätään m tuntia. Esimerkiksi $2 \oplus 6 = 8$ ja $9 \oplus 4 = 1$.

1. Määritä kellonajat $2 \oplus 9$, $3 \oplus 12$ ja $10 \oplus 6$.
2. Kuvitellaan kellotaulu, jossa on 13 tuntia, ja tarkastellaan kellotaululaskutoimitusta joukossa $K_{13} = \{1, 2, 3, \dots, 13\}$. Mitä saat nyt tulokseksi edellisen tehtävän laskuista?

Tehtävä II

Äärellisessä joukossa määritellyn laskutoimituksen kaikki mahdolliset tulokset voidaan kirjoittaa *laskutoimitustauluun*. Taulun sarakkeet ja rivit nimetään joukon S alkoilla, ja taulukon riville x sarakkeeseen y kirjoitetaan tulos $x * y$.

Oheinen laskutoimitustaulu määrittelee erään hedelmien joukon laskutoimituk-

sen. Kutsutaan tätä laskutoimitusta hedelmäkertolaskuksi.

\otimes	omena	banaani	päärynä	luumu
omena	luumu	omena	päärynä	banaani
banaani	omena	banaani	päärynä	luumu
päärynä	päärynä	päärynä	luumu	omena
luumu	banaani	luumu	omena	luumu

3. Määritä seuraavat hedelmät: päärynä \otimes banaani, omena \otimes luumu, päärynä \otimes omena.

Tehtävä III

Joukon S laskutoimitus $*$ on

- *liitännäinen*, jos $x * (y * z) = (x * y) * z$ kaikilla $x, y, z \in S$
- *vaihdannainen*, jos $x * y = y * x$ kaikilla $x, y \in S$.

4. Osoita, että tehtävän II hedelmäkertolasku on vaihdannainen laskutoimitus.
- 5.* Osoita, että tehtävän II hedelmäkertolasku ei ole liitännäinen laskutoimitus.
- 6.* Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitus $x * y = x + y + 1$. Onko laskutoimitus liitännäinen? Entä vaihdannainen?

Tehtävä IV

Olkoon $*$ on joukossa S määritelty laskutoimitus. Joukon S alkioita e kutsutaan *neutraalialkioksi*, jos

$$e * x = x \quad \text{ja} \quad x * e = x \quad \text{kaikilla } x \in S.$$

Oletetaan, että laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio e . Olkoon $x \in S$. Alkiota x' kutsutaan alkion x *käänteisalkioksi*, jos

$$x * x' = e \quad \text{ja} \quad x' * x = e.$$

7. Määritä joukon K_{12} kellotaulusumman neutraalialkio.
8. Jatkoa edelliseen tehtävään. Mitkä ovat alkioiden käänteisalkiot?
- 9.* Mikä on neutraalialkio ja mitkä ovat alkioiden käänteisalkiot, jos tutkitaan-kin kellotaulusummaa joukossa K_{13} ?

10. Osoita, että tehtävän II hedelmäkertolaskulla on neutraalialkio, ja tutki, millä hedelmillä on käänteishedelmät.
11. Olkoon A joukko. Yhdisteoperaatio \cup on potenssijoukon $\mathcal{P}(A)$ laskutoimitus. Onko sillä neutraalialkiota?
12. Jatkoa edelliseen tehtävään. Myös leikkausoperaatio \cap on potenssijoukon $\mathcal{P}(A)$ laskutoimitus. Onko sillä neutraalialkiota?

Tehtävä V

- 13.* Olkoon $*$ joukon S liitännäinen laskutoimitus. Oletetaan, että joukon S alkioilla x ja y on käänteisalkiot. Osoita, että alkioilla x ja y on käänteisalkio.

Tehtävä VI

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä kertaa ydinasioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

14. Tarkastellaan kokonaislukujen laskutoimitusta $x * y = x + 5y$. Onko laskutoimitus liitännäinen? Entä vaihdannainen? Määritä laskutoimituksen neutraalialkio ja alkoiden käänteisalkiot, jos niitä on olemassa.
15. Oletetaan, että $*$ on joukossa S määritelty laskutoimitus. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Perustele vastauksesi.
 - (a) Jokaisella $a \in S$ pätee $(a * a) * a = a * (a * a)$.
 - (b) Joukon S alkioilla voi olla useita käänteisalkioita laskutoimituksen $*$ suhteen.