Riskiteoria 20.12.2011

1. Osoita, että kahden riippumattoman painotettua Poisson-jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan summa noudattaa painotettua Poisson-jakaumaa.

2. Yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa parametrilla (λ, S), missä $S(z) = 1 - e^{-\mu z}$ alueessa $z > 0$ (eksponenttijakauma parametrina μ). Vuotuinen vakuutusmaksu on $(1+v)\mathbb{E}(X)$. Tarkastellaan X:n jakaumaa normaaliapproksimaation tarkkuudella ($\phi(2.33) = 0.99$, missä ϕ on standardi normaalijakauman kertymäfunktio). Olkoon $\mu = 1$ ja $\varepsilon = 0.01$.

a) Olkoon $v = 0.1$. Miten suuri on Poisson-parametrin oltava, että vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä olisi tason ε alapuolella ilman alkupääomaa.

b) Olkoon alkupääoma $U_0 = 30$ ja $\lambda = 100$. Miten suuri on varmuuslisän v oltava, että vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä olisi tason ε alapuolella.

3. Yhtiön yksittäisen vahingon suuruuden Z kertymäfunktio on S. Yhtiöllä on koko kantaa koskeva XL-jälleenvakuutussuoja omavastuurajana M. Jäljelle jäävälle osalle Z' yhtiöllä on osamääräjälleenvakuutus siten, että jälleenvakuuttaja maksaa siitä määrän $(1-r)Z'$.

a) Määrää omalla vastuulla olevan yksittäisen vahingon suuruuden kertymäfunktio.

b) Määrää omalla vastuulla olevan vahingon suuruuden odotusarvo, kun Z on eksponenttijakautunut odotusarvona 1.

4. Vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteettifunktiona Λ, missä

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds, \qquad \lambda(t) = \lambda_1,\ \forall t \in (0, 1/2], \qquad \lambda(t) = \lambda_2,\ \forall t \in (1/2, 1]$$

ja λ_1 ja λ_2 ovat positiivisia vakioita. Vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia välille $(0,1)$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Yksittäisen vahingon suuruus on vakio $(=1)$ ja korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön. Yhtiö on aloittanut toimintansa hetkellä nolla.

Yhtiö määrää korvausvastuuennusteen hetkellä 1 tyyppiä $aV + b$ olevalla kaavalla, missä a ja b ovat vakioita ja V hetkellä 1 tunnettuina olevien vahinkojen lukumäärä. Olkoon U korvausvastuu hetkellä 1. Kertoimet a ja b määrätään siten, että keskineliöpoikkeama $\mathbb{E}((U - aV - b)^2)$ minimoituu. Määrää korvausvastuuennuste hetkellä 1.

5. Yhtiön vuosien $1, 2, \ldots$ tappiot $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Olkoon näiden yhteinen kumulantit generoiva funktio c äärellinen kaikkialla ja $\lim_{s\to\infty} c'(s) = \infty$. Oletetaan, että yhtälöllä $c(s) = 0$ on yksikäsitteinen positiivinen juuri R. Olkoon $U_0 > 0$ yhtiön alkupääoma ja $0 < y < x < 1/c'(R)$. Määrää

$$\lim_{U_0\to\infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}\left(\frac{T}{U_0} \in [y, x]\right).$$

Riskiteoria 20.12.-11

1. Harj. 4, teht. 2.

2. $\mathbb{E}(X) = \lambda a_1 = \lambda$, $\sigma_X^2 = \lambda a_2 = 2\lambda$. Vaatimus on

$$P(X > U_0 + (1+v)\mathbb{E}(X)) = P\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X} > \frac{U_0 + v\mathbb{E}(X)}{\sigma_X}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{U_0 + v\lambda}{\sqrt{2\lambda}}\right) = \varepsilon \quad \therefore \quad \frac{U_0 + v\lambda}{\sqrt{2\lambda}} = 2.33$$

a) $v = 0.1$, $U_0 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda = \left(\frac{2.33 \cdot \sqrt{2}}{v}\right)^2 \approx 1085$

b) $U_0 = 30$, $\lambda = 100$ $\rightarrow$ $v = \frac{2.33\sqrt{2\lambda} - U_0}{\lambda} \approx 0.03$

3. $Z^{ov} = r \min(Z, M)$

$$\{Z^{ov} \le z\} = \left\{\min(Z, M) \le \frac{z}{r}\right\} = \begin{cases} \{Z \le \frac{z}{r}\}, & \text{jos } \frac{z}{r} < M \\ \Omega, & \text{jos } \frac{z}{r} \ge M \end{cases}$$

$$\therefore \quad S^{ov}(z) = \begin{cases} S(\frac{z}{r}), & \text{jos } z < rM \\ 1, & \text{jos } z \ge rM \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(Z^{ov}) = r\,\mathbb{E}(\min(Z, M)) = r\left[\int_0^M z e^{-z}\,dz + Me^{-M}\right]$$

$$= r(1 - e^{-M}) \quad \text{(Luennot, kohta 2.1).}$$

4. Ilmeisesti

$$\mathbb{E}\left((U - aV - b)^2\right) = \mathrm{Var}(U - aV - b) + \left(\mathbb{E}(U - aV - b)\right)^2$$

$$= \mathrm{Var}\,U + a^2\,\mathrm{Var}\,V + \left(\mathbb{E}(U) - a\,\mathbb{E}(V) - b\right)^2 \quad (\text{sillä } U \perp\!\!\!\perp V)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} = 2a\,\mathrm{Var}\,V - 2\mathbb{E}(V)\left(\mathbb{E}(U) - a\,\mathbb{E}(V) - b\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} = -2\left(\mathbb{E}(U) - a\,\mathbb{E}(V) - b\right) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $a = 0$, $b = \mathbb{E}(U)$. Ennuste on

$$\int_0^1 \lambda(s)\left(1 - \underbrace{G(1-s)}_{= 1-s}\right) ds = \int_0^{1/2} \lambda_1 s\,ds + \int_{1/2}^1 \lambda_2 s\,ds = \frac{\lambda_1}{8} + \frac{3\lambda_2}{8}$$

(Lause 8.3.1)

5) $$1 = \frac{\mathbb{P}(T < y\, U_0)}{\mathbb{P}(T \le x\, U_0)} + \frac{\mathbb{P}(T \in [y\, U_0, x\, U_0])}{\mathbb{P}(T \le x\, U_0)}$$

$$\le \frac{e^{-h(y) U_0}}{e^{-(h(x)+\varepsilon) U_0}} + \frac{\mathbb{P}(T \in [y\, U_0, x\, U_0])}{\mathbb{P}(T \le x\, U_0)}$$

$$= o(1) + \frac{\mathbb{P}(T \in [y\, U_0, x\, U_0])}{\mathbb{P}(T \le x\, U_0)},$$

kun $\varepsilon > 0$: $h(x) + \varepsilon < h(y)$, siis

$$\mathbb{P}\left(\frac{T}{U_0} \in [y, x]\right) \ge (1 + o(1))\, \mathbb{P}(T \le x\, U_0)$$

Toinen suunta on triviaali, joten

$$\mathbb{P}\left(\frac{T}{U_0} \in [y, x]\right) = (1 + o(1))\, \mathbb{P}(T \le x\, U_0).$$

Lauseen 9.1.2 nojalla raja-arvo on $-x\, C^*(1/x)$.