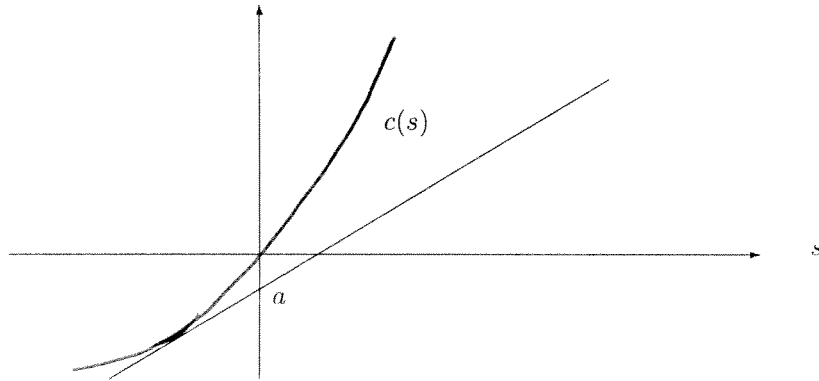


Suurten poikkeamien teoriaa Edellä esitetyn minimointiongelman ratkaisemisessa nojaututaan *suurten poikkeamien teoriaan*. Esitetään seuraavassa muutamia tähän liittyviä käsitteitä ja tuloksia. Teoria katsotaan alkaneeksi vuonna 1938 ns. Cramérin lauseesta. Huomattavaa kehitystä on tapahtunut viime vuosikymmeninä. Mainittakoon esimerkkinä Gärtner-Ellisin lause, joka sallii riippuvuutta summattaville ξ_1, ξ_2, \dots (Gärtner (1977), Ellis (1984)).

Olkoot muuttujat ξ, ξ_1, ξ_2, \dots ja S_1, S_2, \dots kuten kappaleen 6.3.3 alussa. Olkoon ξ -muuttujien yhteinen jakauma P . Määritellään funktion c_ξ *konvekssi konjugaatti* c_ξ^* ehdosta

$$c_\xi^*(v) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{sv - c_\xi(s)\}.$$

Tällä on seuraava hyödyllinen geometrinen tulkinta.



Kuvassa c :n tangentin kulmakerroin on v . Konjugaattifunktion arvo $c^*(v)$ on tangentin ja pystyakselin leikkauspisteen a etäisyys origosta.

Lemma 6.3.3.1. Funktioilla c_ξ ja c_ξ^* on seuraavat ominaisuudet.

- (i) Molemmat ovat konvekseja.
- (ii) $c_\xi^*(v) \geq 0$ kaikilla $v \in \mathbb{R}$.
- (iii) $c_\xi^*(\mu_\xi) = 0$.
- (iv) Jos $c'_\xi(s_v) = v$ jollain $s_v \in \mathcal{D}$, niin $c_\xi^*(v) = s_v v - c_\xi(s_v)$.

Todistus (pääpiirteissään). Funktion c_ξ konveksisuus seuraa Hölderin epäyhtälöstä. Funktio c_ξ^* on konvekssi konveksien (lineaaristen) funktioiden pisteittäisenä supremumina. Selvästi

$$c_\xi^*(v) \geq 0 \cdot v - c_\xi(0) = 0$$

kaikilla $v \in \mathbb{R}$. Koska $s \rightarrow sv - c_\xi(s)$ määrittelee konkaavin funktion, se saavuttaa globaalin maksiminsa jokaisessa derivaatan nollakohdassa. Siis (iv) pätee. Jos $c'_\xi(0)$ on olemassa, niin $\mu_\xi = c'_\xi(0)$. Tällöin

$$c_\xi^*(\mu_\xi) = 0 \cdot \mu_\xi - c_\xi(0) = 0.$$

Kohta (iii) pätee myös, kun c_ξ ei ole derivoituva origossa. Tämän todistus sivuutetaan. \square

Konvekssi konjugaatti kuvaa todennäköisyyksiä $\mathbb{P}(S_n/n \in \cdot)$ seuraavasti.

Konvekssi konjugaatti olkoon c^* ,

$$c^*(v) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{sv - c(s)\}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Merkitään

$$\bar{s} = \sup\{s \in \mathbb{R} \mid c(s) < \infty\} \in [0, \infty]$$

ja

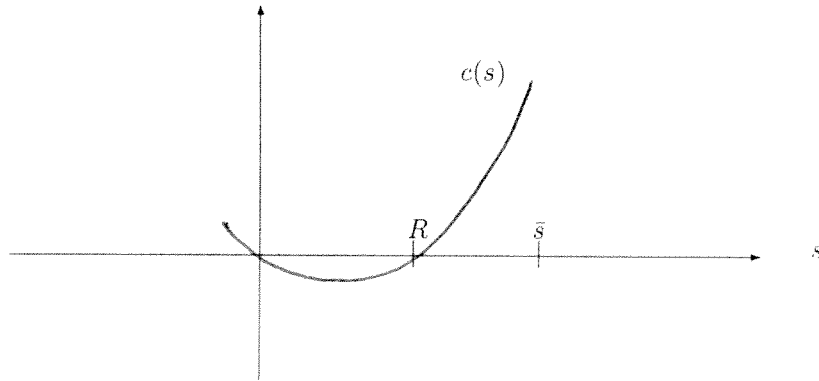
$$\underline{x} = \lim_{s \rightarrow \bar{s}^-} \frac{1}{c'(s)}.$$

Raja-arvo on olemassa, koska c' on konveksisuuden nojalla kasvava. Määritellään kuvaus $h : (\underline{x}, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ehdosta

$$h(x) = xc^*(1/x).$$

Lemma 9.1.1. Olkoon $\mathbb{E}(\xi) < 0$ ja $\text{Var}(\xi) > 0$. Oletetaan lisäksi, että $c(s) \in (0, \infty)$ jollain $s > 0$. Silloin on olemassa yksikäsitteinen $R \in (0, \infty)$, jolle $c(R) = 0$. Jos $x \in (\underline{x}, \infty)$, niin on olemassa yksikäsitteinen $s_x \in (0, \bar{s})$ siten, että $c'(s_x) = 1/x$ ja lisäksi $h'(x) = -c(s_x)$. Olkoon $\mu_T = 1/c'(R)$. Silloin $h(\mu_T) = R$, h on aidosti vähenevä välillä $(\underline{x}, \mu_T]$ ja aidosti kasvava välillä $[\mu_T, \infty)$.

Parametria R kutsutaan *Lundbergin eksponentiksi*. Nimitys tulee seuraavan lauseen tuloksista. Oletus $\mathbb{E}(\xi) < 0$ merkitsee sovelluksen näkökulmasta sitä, että vakuutusmaksu sisältää positiivisen varmuuslisän.



Lemman 9.1.1 todistus. Osoitetaan ensin, että c on aidosti konvekssi alueessa \mathcal{D} . Olkoon $s_0 \in \mathcal{D}$. Tällöin $c''(s_0) = \text{Var}_{s_0}(\xi) \geq 0$ (variassi konjugaattijakauman P_{s_0} suhteen). Erisuuruus on aito, sillä muuten P_{s_0} keskittyisi yhteen pisteeseen ja samoin myös alkuperäinen jakauma. Siis $c''(s_0) > 0$, joten c on aidosti konvekssi.

Koska $\mathbb{E}(\xi) < 0$, niin $c(s)$ on negatiivinen jollain $s > 0$. Oletuksen mukaan myös $c(s) > 0$ jollain $s > 0$, joten lemmän mukainen R on olemassa. Yksikäsitteisyys seuraa c :n konveksisuudesta. Koska c' on jatkuva joukossa \mathcal{D} , niin ilmeisesti $c'(s) = 0$ eräälle $s > 0$. Jos $x \in (\underline{x}, \infty)$, niin aidon konveksisuuden nojalla on olemassa yksikäsitteinen $s_x \in (0, \infty)$, jolle $c'(s_x) = 1/x$. Yhteys määrittelee kuvauksen $x \rightarrow s_x$, joka on derivoituva (sillä $s_x = (c')^{-1}(1/x)$).

Valitsemalla $y = \mu_T$ saadaan myös arvio alaspäin. Lemman 6.3.3.1 nojalla tällöin

$$yc^*(1/y) = \frac{c^*(c'(R))}{c'(R)} = \frac{Rc'(R) - c(R)}{c'(R)} = R.$$

Siis

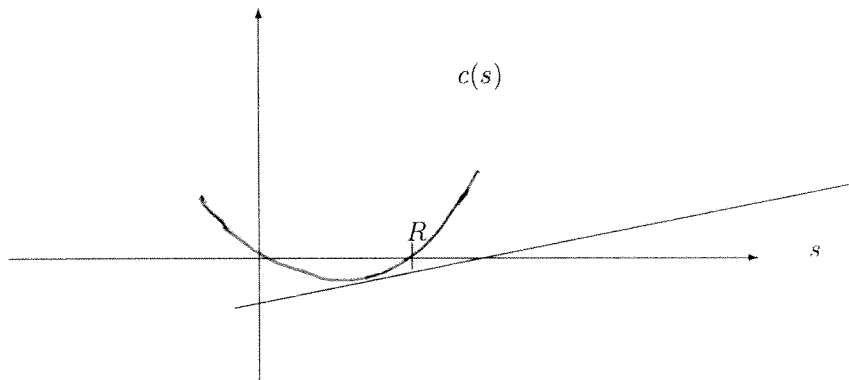
$$\liminf_{U_0 \rightarrow \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \geq -R.$$

Ylärajan (9.1.1) nojalla

$$\limsup_{U_0 \rightarrow \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \leq -R.$$

Tulokset yhdessä todistavat raja-arvon (9.1.2). \square

Alarajan todistusta havainnollistaa seuraava kuva.



Kuvassa tangentin kulmakerroin on $1/y$. Tällöin tangentin ja vaaka-akselin leikkauspisteen etäisyys origosta on $yc^*(1/y)$. Lyhin etäisyys on R ja se saavutetaan, kun $1/y = c'(R)$.

Lauseen 9.1.2 todistus. Siirrytään kuten edellisen lauseen todistuksessa konjugaattijakaumaan käyttäen nyt kuitenkin lemmän 9.1.1 mukaista parametria s_x . Saadaan

$$\mathbb{P}(T \leq xU_0) = \mathbb{E}_{s_x} \left(e^{-s_x Y_T + T c(s_x)} \mathbf{1}(T \leq xU_0) \right).$$

Ilmeisesti $c(s_x) \geq 0$, joten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \leq xU_0) &\leq e^{-s_x U_0 + xU_0 c(s_x)} \mathbb{P}_{s_x}(T \leq xU_0) \\ &\leq e^{-x(s_x/x - c(s_x))U_0} = e^{-xc^*(1/x)U_0}. \end{aligned}$$

Saatiin (9.1.3)

Olkoon nyt $y \in (0, x)$ kiinteä. Kun y on riittävän lähellä x :ää, on aidon konveksisuuden nojalla $y = 1/c'(s_y)$ eräälle $s_y > s_x$. Nyt

$$\{Y_{\lfloor yU_0 \rfloor + 1} > U_0\} \subset \{T \leq xU_0\}.$$

Simuloinnin toteutus voisi olla seuraava.

- 1) Tuotetaan havainto struktuurimuuttujasta Q_1 .
- 2) Tuotetaan havainto muuttujasta ε_1 ja määrätään s_1 kaavasta $s_1 = a_1 s_0 + a_2 s_{-1} + \varepsilon_1$.
- 3) Poisson-parametri on nyt $\lambda_1 = \lambda Q_1(1 + s_1)r$. Tuotetaan havainto Poisson-jakaumasta tällä parametrilla. Olkoon tämä K_1 .
- 4) Tuotetaan havainto muuttujasta ε'_1 ja määrätään inflaatioaste yhtälöstä $\log(1 + i_1) = i + a(\log(1 + i_0) - i) + \varepsilon'_1$.
- 5) Tuotetaan K_1 havaintoa jakaumasta S_1 : $S_1(z) = S\left(\frac{z}{1+i_1}\right)$.
- 6) Määrätään X_1 näiden summana.

Seuraavan vuoden kokonaisvahinkomäärä X_2 määrätään vastaavasti. Toteutuksessa käytetään vuoden 1 havaintoja s_1 ja i_1 syklin ja inflaatioasteen generoinnissa. Näin jatkaen saadaan vahinkomääriä koskeva vektori (X_1, \dots, X_{10}) . Tämä määrää myös vakuutusmaksurealisaation (B_1, \dots, B_{10}) ja vararikkoindikaattori T_1 voidaan muodostaa. Vastaavasti määrätään T_2, \dots, T_N , kunnes otos voidaan katsoa riittävän suureksi todennäköisyyden $\mathbb{P}(T \leq 10)$ estimoimiseen.

Ilmeistä on, että menettelyllä saadaan harhattomia estimaatteja vararikkotodennäköisyydelle. Pysäytysääntö voidaan nytkin perustaa keskeiseen raja-arvolauseeseen. Menettely on melko raskas, jos Poisson-parametri on suuri. Havainnollisuutta tuloksiin saadaan piirtämällä realisaatiot:

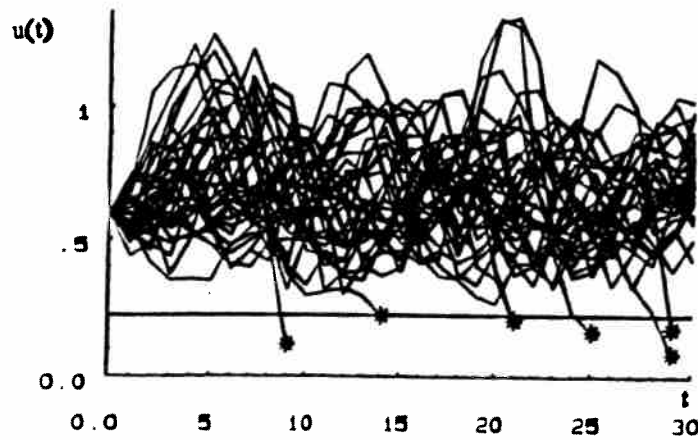


Fig. 4.3.1. Solvency ratio of the standard insurer. Forty realizations.

Lähde: Pentikäinen et al. (1989). Kuva ei perustu edellä tarkasteltuun esimerkkiin.