

Riskiteorian laskuharjoitus 12, 14.12.2011

Tehtävissä 1-4 ξ, ξ_1, ξ_2, \dots ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita yhtiön vuotuisia tappioita kuvaavia satunnaismuuttujia ja c muuttujan ξ kumulantit generoiva funktio. Lisäksi U_0 on alkupääoma ja T vararikkohetki.

1. Oletetaan, että ξ on normaalisti jakautunut odotusarvona μ ja varianssina σ^2 . Osoita, että $\mathbb{P}(T \leq 10) \leq 0.01$, kun $\mu = -1/10$, $\sigma = 1$ ja $U_0 = 10$.

2. Oletetaan, että $\xi = X - P$, missä P on vakio ja X noudattaa painotettua Poisson-jakaumaa parametrilla (λ, Q) . Oletetaan, että $P > \lambda$. Olkoot λ ja P kiinteitä ja $R(Q)$ Lundbergin eksponentti. Osoita, että $R(Q) \leq R$, missä R on Lundbergin eksponentti, kun $\mathbb{P}(Q = 1) = 1$.

3. Oletetaan, että $\mathbb{P}(\xi > M) = 0$ erälle vakiolle $M \in (0, \infty)$. Oletetaan lisäksi, että c on äärellinen koko reaaliakselilla ja että yhtälöllä $c(s) = 0$ on yksikäsitteinen positiivinen juuri R . Osoita, että

$$\mathbb{P}(T < \infty) \geq e^{-R(M+U_0)}.$$

4. Oletetaan, että c on äärellinen kaikkialla ja että $\lim_{s \rightarrow \infty} c'(s) = \infty$. Oletetaan lisäksi, että yhtälöllä $c(s) = 0$ on yksikäsitteinen positiivinen juuri R . Olkoon $0 < y < x < 1/c'(R)$. Osoita, että

$$\lim_{U_0 \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T > yU_0 | T \leq xU_0) = 1.$$

5. Yhtiön i vuosien $1, 2, \dots$ tappiot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ($i = 1, 2$). Oletetaan, että yhtiön i vuotuinen tappio on muotoa $X(i) - P$, missä P on deterministinen yhtiöstä riippumaton vakio ja $X(i)$ noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa Poisson-parametrina λ_i . Yksittäisen vahingon suuruudella on eksponenttijakauma parametrina μ_i . Oletetaan, että $P > \lambda_i/\mu_i$, $i = 1, 2$.

a) Määrää yhtiöiden Lundbergin eksponentit.

b) Oletetaan lisäksi, että $\lambda_1 > \lambda_2$ ja $\lambda_1/\mu_1 = \lambda_2/\mu_2$. Olkoon kummankin yhtiön alkupääoma U_0 ja T_i yhtiön i vararikkohetki. Osoita, että

$$\mathbb{P}(T_1 < \infty) < \mathbb{P}(T_2 < \infty),$$

kunhan alkupääoma U_0 on riittävän suuri.