

Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 5, syksy 2011

1. Ratkaise lineaarinen systeemi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

Ohje. Suora yrite. Se johtaa 4×4 -kokoiseen lineaariseen yhtälöryhmään.

2. (Vaikeampi, kahden suorituspisteen arvoinen). Homogeenisysteemillä

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A(t)\mathbf{z}(t), \quad \text{jossa } A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/t^2 & 1/t \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2,$$

on välillä $I =]0, \infty[$ ratkaisu

$$\mathbf{z}_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Etsi systeemin perusjärjestelmä välillä I ja kirjoita yleinen ratkaisu.

Ohje. Eliminointi auttaa.

3. Määrää seuraavien autonomisten systeemien kriittiset pisteet ja niiden laatu (stabiili vai epästabiili):

$$\begin{array}{ll} (a) & \dot{x} = y - 1 \\ & \dot{y} = -x + y + 5, \end{array} \quad \begin{array}{ll} (b) & \dot{x} = -4x + 2y + 8 \\ & \dot{y} = x - 2y + 1. \end{array}$$

4. Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:

$$\begin{array}{l} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = 2 - x^2 - y^2. \end{array}$$

5. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja radat:

$$\begin{array}{l} \dot{x} = (x + 1)(y - 2) \\ \dot{y} = x^2 - x - 2. \end{array}$$

Mitä Poincarén lause kertoo kriittisten pisteiden laadusta? Luonnostele lisäksi virtauskuvio, lähinnä ratoja virtaussuuntineen. Kertooko se jotain kriittisten pisteiden laadusta?