

**Differentiaaliyhtälöt II**  
Harjoitus 3, syksy 2011

1. Palauta seuraavat differentiaaliyhtälöt 1.kl. normaalimuotoisiksi systeemeiksi:

$$(a) \quad y'' - \frac{1}{3}y^{(3)} + xy - 2x^3 = 0,$$

$$(b) \quad (y'')^2 - \frac{1}{3}y^{(3)} + xyy' - 2x^3 = 0.$$

Onko systeemi lineaarinen, ja jos on niin onko se vakiokertoiminen?

2. Osoita, että funktiopari  $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = ([2 e^t]^T, [e^{-t} 1]^T)$  on lineaarisen  $2 \times 2$ -homogeenisysteemin

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

perusjärjestelmä  $\mathbf{R}$ :ssä.

3. Etsi seuraavan lineaarisen  $2 \times 2$ -homogeenisysteemin perusjärjestelmä  $\mathbf{R}$ :ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Seuraavissa tehtävissä (ja jatkossa) käytetään merkintää  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ .

4. Etsi seuraavan  $2 \times 2$ -homogeenisysteemin yleinen ratkaisu  $\mathbf{R}$ :ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Lyhyesti, onko vakioratkaisu  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$  stabiili vai epästabiili tasapainotila?

5. Etsi seuraavan  $3 \times 3$ -homogeenisysteemin perusmatriisi  $\mathbf{R}$ :ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Lyhyesti, onko vakioratkaisu  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$  stabiili vai epästabiili tasapainotila?