

Differentiaaliyhtälöt II

Harjoitus 1, syksy 2011

1. Ratkaise mukauttamalla lineaarista 2.kl. teoriaa seuraava lineaarinen 4.kl. homogeeniyhtälö:

$$y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0.$$

2. Määrää kolme ensimmäistä Picardin approksimaatiota AAT:lle

$$y' = -y, \quad y(0) = 2,$$

ja vertaa tarkkaan ratkaisuun.

3. Onko funktio $f(x, y) = e^{x+y}$ joukossa $I \times J$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen, kun

(a) $I = [0, 1]$ ja $J = [0, 1]$,

(b) $I = [0, 1]$ ja $J = \mathbf{R}$,

(c) $I = \mathbf{R}$ ja $J = [0, 1]$?

Muutaman sanan vastaus riittää, ei tarvitse todistaa.

4. (a) Missä \mathbf{R}^2 :n alueissa DY $y' = \sqrt[3]{y-1}$ toteuttaa lokaalin OY-lauseen 4.4 ehdot? Perustele lyhyesti ehtojen voimassaolo.

(b) Osoita, että $f(x, y) = \sqrt[3]{y-1}$ ei ole esimerkiksi suorakaiteessa $K = [0, 1] \times [0, 1]$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen.

5. Olkoon funktio y AAT:n

$$y' = e^x \sin x \cos y, \quad y(0) = y_0 \in \mathbf{R},$$

(maksimaali)ratkaisu. Osoita globaalin OY-lauseen 4.6 avulla, että y on määritelty koko \mathbf{R} :ssä.

Ohje. Väliarvolause.