2. Fredholm teoriaa ODY:llä

Olemme todistaneet, että elliptisellä operaattorilla $L = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j a^{jk} \partial_k + \sum_{j=1}^{n} b^j \partial_j + c$ pätee

<u>Lause 2.1</u> Olkoon L elliptinen operaattori rajatetussa C^1-alueessa Ω. Tällöin on olemassa $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ s.e. kun $\lambda \geq \lambda_0$, on kaikille $f \in H^{-1}(\Omega)$ yhtälölle

$$(L + \lambda_0) u = f \quad \Omega\text{:ssa}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

yksikäsitteinen ratkaisu ja vakio $C > 0$ s.e.

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

kun $\quad v \in H^1_0(\Omega)$ pätee (H+) jollekin $c_1 > 0$

$$Lv \in H^{-1}(\Omega),$$

$$\|Lv\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c_1 \|v\|_{H^1_0(\Omega)}$$

Lisäksi

$$I : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$
$$v \mapsto v$$

on rajoitettu. Siispä

$$L + \lambda I : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

on rajoitettu operaattori. Kun $\underline{\underline{\lambda \geq \lambda_0}}$, on

$$L + \lambda I : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

kääntyvä operaattori, eli on olemassa rajoitettu operaattori

$$(L + \lambda I)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$$

ts., kun $v \in H^1_0(\Omega)$ ja $f \in H^{-1}(\Omega)$ pätee

$$(L + \lambda I)\, u = f$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$u = (L + \lambda I)^{-1} f$$

Seuraavaksi tutkimme, mitä tapahtuu kun $\lambda \in \mathbb{C}$ on mielivaltainen. Kirjoitamme yhtälön

$$(L + \lambda) u = f \quad , \quad u \in H_0^1(\Omega), \; f \in H^{-1}(\Omega)$$

muotoon

$$(1) \quad \underbrace{(L + \lambda_0 I) u}_{Au} + \underbrace{(\lambda - \lambda_0) I u}_{Bu} = f$$

Tässä $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ on kääntyvä operaattori, ja

$$B : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

on rajoitettu. Tällöin (1) on ekvivalentti yhtälön

$$A^{-1}(A + B) u = A^{-1} f$$

eli

$$(I + A^{-1}B) u = A^{-1} f$$

kanssa. Seuraavaksi osoitamme, että $A^{-1}B$ on n.s. kompakti operaattori.

Määr 2.2. Olkoon X, Y Banach-avaruuksia, molemmat varustettuina normin määräämällä topologialla. Sanomme, että lineaarinen kuvaus $T: X \to Y$ on kompakti, jos yksikköpallon

$$B_X(1) = \{x \in X \mid \|x\|_X < 1\}$$

kuvan sulkeuma,

$$cl_Y(T B_X(1)) \subset Y$$

on kompakti joukko.

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa (Miksi?), että jos

$$x_n \in X, \quad \|x_n\|_X \leq C, \quad n = 1, 2, \dots$$

niin on olemassa osajono x_{n_j} jolle raja-arvo

$$\lim_{j \to \infty} T x_{n_j}$$

on olemassa Y:ssä.

Heikko topologia

Olkoon H Hilbert avaruus kerroinkunnalla $\mathbb{C}$. Samaistamme H:n duaaliavaruuden H^* avaruuden H kanssa, siten, että alkiota $x \in H$ vastaa lineaarikuvaus L_x,

$$L_x : H \to \mathbb{C}$$

$$\langle L_x, y \rangle = L_x(y) = (y, x)_H$$

Määr 2.3 Jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in H$ suppenee heikosti kohti alkiota $x \in H$ jos kaikilla $a \in H^*$

$$\lim_{n \to \infty} \langle a, x_n \rangle = \langle a, x \rangle$$

Merkitsemme

$$x_n \to x \quad , \quad \text{tai}$$

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad , \quad \text{tai}$$

$$\operatorname*{w-lim}_{n \to \infty} x_n = x \quad \text{tai}$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \text{heikosti.}$$

<u>ESIM</u> Jos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee H:n normitopologiassa kohti alkiota $x \in H$, eli

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$ eli

$$x_n \to x$$ eli

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \|_H = 0$$

niin $x_n \xrightarrow{w} x$.

<u>ESIM</u> Olkoon $H = \ell^2$,

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

n:s paikka.

Tällöin kaikilla $L_x \in (\ell^2)^*$, $x \in \ell^2$, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \langle L_x, e_n \rangle = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

eli

$$e_n \xrightarrow{w} 0$$

Huom $\|e_n\|_{\ell^2} = 1$ kaikilla n. Jos $x_n \xrightarrow{*} x$ niin
$\|x\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_H$ (HT)

Lause (Alaoglu) 2.4 Olkoon H separatiivi Hilbert avaruus, $B = \{x \in H \mid \|x\|_H < 1\}$.

Tällöin B on relatiivisesti kompakti H:n heikossa topologiassa.

Siis: jos $\|x_n\|_H \leq C$, kaikilla n niin on olemassa $x \in H$ ja osajono $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, $n_j \to \infty$ kun $j \to \infty$, s.e.

$$x_{n_j} \xrightarrow{w} x \quad \text{kun} \quad j \to \infty$$

Huomautus Yleisemmän Banach-Alaoglun lauseen nojaa refleksiivisen Banach avaruuden X yksikköpallo on heikosti kompakti

<u>Tod</u> Olkoon $\{z_k \mid k=1,2,\dots\} \subset H$ tiheä, $f_k = L_{z_k}$ jonkka, ja $x_n \in B$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

Nyt

$$|\langle f_k, x_n \rangle| \leq \|f_k\|_{H^*}.$$

Kun $k=1$, voimme valita jonolle $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ osajonon $(x_{1n})_{n=1}^{\infty}$ jolle

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_1, x_{1n} \rangle$$

on olemassa. Valitaan seuraavaksi $(x_{1n})_{n=1}^{\infty}$-jonon osajono $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ jolle

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_2, x_{2n} \rangle$$

on olemassa. Tastanelle tätä, löydämme jonot $(x_{mn})_{n=1}^{\infty}$, jolle $(x_{mn})_{n=1}^{\infty}$ on $(x_{m-1,n})_{n=1}^{\infty}$:n osajono ja

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_k, x_{mn} \rangle$$

on olemassa kaikille $k \leq m$.

$$\begin{array}{cccc}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\
\vdots & & &
\end{array}$$

Olkoon $y_n = x_{nn}$. Tällöin $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ on jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ osajono, jolle

$$T_k := \lim_{n\to\infty} \langle f_k , y_n \rangle$$

on olemassa kaikilla k. Selvästi

$$|T_k| \le \|f_k\|_{H^*}.$$

Jos nyt $f = L_z \in H^*$, on kaikilla $\varepsilon > 0$ olemassa f_k s.e. $\|f_k - f\|_{H^*} = \|z_k - z\|_H < \frac{\varepsilon}{3}$. Valitaan nyt N_0 s.e.

$$n, m \ge N_0 \Rightarrow |\langle f_k, y_n\rangle - \langle f_k, y_m\rangle| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tällöin

kun $n, m \geq N_0$, pätee

$$|\langle f, Y_n\rangle - \langle f, Y_m\rangle|$$

$$\leq | \langle f - f_k, Y_n\rangle + \langle f_k, Y_n - Y_m\rangle +$$

$$+ \langle f_k - f, Y_m\rangle|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Siispä $(\langle f, Y_n\rangle)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono, joten

on olemassa $T_f := \lim_{j\to\infty} \langle f, Y_n\rangle$.

Siis kaikille $z \in H$ on olemassa

$$a(z) = \lim_{n\to\infty} \langle f, Y_n\rangle, \quad f = L_z$$

Selvästi

$$|a(z)| \leq \|f\|_{H^*} = \|z\|_H$$

$$z \mapsto a(z)$$

on lineaarinen. Siispä $a \in H^*$ ja Rieszin lauseen nojalla on $Y \in H$ jolle

$$(z, Y)_H = a(z) = \lim_{n\to\infty} \langle f, Y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} (z, Y_n)_H$$

tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $Y_n \overset{*}{\rightarrow} Y$. $\square$

Lemma 2.5 Olkoon $A: H \to H$ rajoitettu lin. operaattori ja $K: H \to H$ kompakti lin. operaattori. Oletetaan, että $\text{w-}\lim_{n\to\infty} u_n = u$ H:ssa. Tällöin

$$\text{w-}\lim_{n\to\infty} Au_n = Au, \quad \lim_{n\to\infty} Ku_n = Ku$$

Tod. Kaikille $z \in H$ pätee

$$(Au_n - Au, z)_H = (u_n - u, A^* z)_H \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

joten

$$Au_n \xrightarrow{w} Au.$$

Tämä todistaa ensimmäisen väitteen.

Jos $Ku_n \to Ku$ ei ole voimassa, on olemassa osajono $(u_{n_j})_{j=1}^\infty$ ja $\varepsilon_0 > 0$ joille

$$\|Ku_{n_j} - Ku\|_H \geq \varepsilon_0.$$

Toisaalta, koska K on kompakti, jonolle $(Ku_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ on osajono $(Ku_{n_{j_\ell}})_{\ell=1}^{\infty}$, joka suppenee kohti jotain H:n alkiota z. Selvästi $z \neq Ku$. Nyt edellisen nojalla

$$\underset{\ell\to\infty}{\text{w-lim}}\ Ku_{n_{j_\ell}} = Ku$$

$$\lim_{\ell\to\infty} Ku_{n_{j_\ell}} = z \neq Ku,$$

mikä ei ole mahdollista. Tämä todistaa väitteen.

Yleisesti, jos $T: H \to H$ on Hilbert avaruuden H rajoitettu operaattori, $T^*: H \to H$ on rajoitettu operaattori jolle

$$(Tx, y)_H = (x, T^* y) \quad \text{kaikille } x, y \in H.$$

Seuraavaksi todistamme tarvitsemamme tulokset

<u>Lause 2.6</u> Jos $K: H \to H$ on kompakti, niin $K^*: H \to H$ on kompakti.
(tod. Evans D5)

<u>Lause 2.7</u> (Fredholmin alternatiivi)

Olkoon $K: H \to H$ kompakti. Silloin

1) $\operatorname{Ker}(1+K)$ on äärellisulotteinen
2) $\operatorname{Ran}(1+K)$ on suljettu.
3) $\operatorname{Ran}(1+K) = \ker(1+K^*)^{\perp}$
4) $\operatorname{Ker}(1+K) = \{0\} \iff \operatorname{Ran}(1+K) = H$
5) $\dim\left(\ker(1+K)\right) = \dim\left(\operatorname{Ker}(1+K^*)\right)$

(tod. Evans D5, thm. 5)

B1 Esimerkkejä Sobolev-avaruuksista.

Olkoon $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ n-torus.

$n=1$ vastaa ympyrää $S^1 = \mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$

L^2-funktiot $\mathbb{T}^1$:llä voidaan esittää Fourier-sarjan avulla,

$$f \in L^2(\mathbb{T}^1) \Leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j e_j(x), \quad (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$$

missä $e_j(x) = e^{2\pi i j x}$. Merk. $a_j = \hat{f}_j$, $\hat{f} = (\hat{f}_j)$

Nyt $f \in H^k(\mathbb{T}^1) \Leftrightarrow$

$$D^\alpha f \in L^2(\mathbb{T}^1), \ \forall |\alpha| \le k \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |j^{|\alpha|} \hat{f}_j|^2 < \infty \quad \forall |\alpha| \le k \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle j \rangle^{2k} |\hat{f}_j|^2 = \|\hat{f}\|^2_{\ell^2_k}, \quad \langle j \rangle = (1+j^2)^{\frac{1}{2}}$$

Tällöin

$$\|f\|_{H^k(\mathbb{T}^1)} = \|\hat{f}\|_{\ell^2_k}$$

Olkoon $s \in \mathbb{R}_+$

Määrittelemme

$$f \in H^s(T^1) \iff \|\hat{f}\|^2_{\ell^2_s} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle j\rangle^{2s} |\hat{f}_j|^2 .$$

Olkoon $T \in H^s(T^1)' := H^{-s}(T^1)$ alkio

$$(1) \qquad \langle T, f\rangle = T(f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} t_j \hat{f}_j$$

missä

$$\|(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^2_{-s}} = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle j\rangle^{-2s} |t_j|^2\Big)^{1/2} < \infty$$

HT: Kaikki $T \in H^{-s}(T^1)$ voidaan esittää tässä muodossa ja

$$\|T\|_{H^{-s}} := \|T\|_{(H^s)'} = \|(t_j)\|_{\ell^2_{-s}} .$$

Kirjoitamme kavaluksella $T \in H^s(T^1)'$ eli $T : H^s(T^1) \to \mathbb{C}$ lausekkeen

$$T = \sum_{j\in\mathbb{Z}} t_j e_j^{\perp}(x), \quad \hat{T}_j = t_j, \; e_j^{\perp} = e_{-j}$$

Tämä sarja ei yleisesti suppene $L^2(T^1)$:ssä, vaan katsomme sen suppenevan $H^{-s}(T^1)$:ssä.

Siinä tapauksessa, että $(t_j) \in \ell^2$,

Sarja

$$T(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} t_j e_j^+(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} t_{-j} e_j(x)$$

suppenee $L^2(T^1)$:ssä ja

$$\langle T, f \rangle = T(f) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{T}_{(-j)} \hat{f}_j = \sum_{j,h \in \mathbb{Z}} T_j f_{jh} \delta_{jh}$$

$$= \int_{T^1} \Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j e_j^+(x) \Big) \cdot \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_j e_j(x) \Big) dx$$

$$= \int_{T^1} T(x) f(x) \, dx$$

Siispä kaikki $T(x) \in L^2(T^1)$ voidaan tulkita $H^{-s}(T^1)$:n alkioiksi, $T : H^s(T^1) \to \mathbb{C}$

$$\langle T, f \rangle = \int_{T^1} T(x) f(x) \, dx.$$

Tällä tulkinnalla

$$H^{-s}(T^1) \subset L^2(T) \subset H^s(T^1)$$

vastaavasti voidaan määritellä $f \in H^s(T^1) \Leftrightarrow$

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i j \cdot x} \hat{f}_j, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle j \rangle^{2s} |\hat{f}_j|^2 < \infty.$$