2. Fredholm teoriaa ODY:llä

Olemme todistaneet, että elliptisellä operaattorilla $L = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j a^{jk} \partial_k + \sum_{j=1}^{n} b^j \partial_j + c$ pätee

Lause 2.1 Olkoon L elliptinen operaattori rajoitetussa C^1-alueessa Ω. Tällöin on olemassa $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ s.e. kun $\lambda \geq \lambda_0$, on kaikille $f \in H^{-1}(\Omega)$ yhtälölle

$$(L + \lambda_0) u = f \quad \Omega\text{:ssa}$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

yksikäsitteinen ratkaisu ja vakio $C > 0$ s.e.

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

kun $v \in H_0^1(\Omega)$ pätee (H+) jollakin $c_1 > 0$

$$Lv \in H^{-1}(\Omega),$$

$$\|Lv\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c_1 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Lisäksi

$$I : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$
$$v \mapsto v$$

on rajoitettu. Siispä

$$L + \lambda I : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

on rajoitettu operaattori. Kun $\underline{\underline{\lambda \geq \lambda_0}}$, on

$$L + \lambda I : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

kääntyvä operaattori, eli on olemassa rajoitettu operaattori.

$$(L + \lambda I)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

ts., kun $v \in H_0^1(\Omega)$ ja $f \in H^{-1}(\Omega)$ pätee

$$(L + \lambda I)\, u = f$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$u = (L + \lambda I)^{-1} f$$

Seuraavaksi tutkimme, mitä tapahtuu kun $\lambda \in \mathbb{C}$ on mielivaltainen.

Kirjoitamme yhtälön

$$(L + \lambda) u = f \,, \qquad \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega) \\ f \in H^{-1}(\Omega) \end{array}$$

muotoon

$$(1) \qquad \underbrace{(L + \lambda_0 I)}_{A} u + \underbrace{(\lambda - \lambda_0) I}_{B} u = f$$

$$A u + B u = f$$

Tässä $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ on kääntyvä operaattori, ja

$$B : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

on rajoitettu. Tällöin (1) on ekvivalentti yhtälön

$$A^{-1}(A + B) u = A^{-1} f$$

eli

$$(I + A^{-1} B) u = A^{-1} f$$

kanssa. Seuraavaksi osoitamme, että $A^{-1} B$ on n.s. kompakti operaattori.

<u>Määr 2.2</u> Olkoon X, Y Banach-avaruuksia, molemmat varustettuina normin määräämällä topologialla. Sanomme, että lineaarinen kuvaus $T: X \to Y$ on kompakti, jos yksikköpallon

$$B_X(1) = \{ x \in X \mid \|x\|_X < 1 \}$$

kuvan sulkeuma,

$$cl_Y \left(T B_X(1) \right) \subset Y$$

on kompakti joukko.

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa (Miksi?), että jos

$$x_n \in X, \quad \|x_n\|_X \leq C, \quad n = 1, 2, \ldots$$

niin on olemassa osajono x_{n_j} jolle raja-arvo

$$\lim_{j \to \infty} T x_{n_j}$$

on olemassa Y:ssä.

Heikko topologia

Olkoon H Hilbert avaruus kertoimilla $\mathbb{C}$. Samaistamme H:n duaaliavaruuden H^* avaruuden H kanssa, siten, että alkiota $x \in H$ vastaa lineaarikuvaus L_x,

$$L_x : H \to \mathbb{C}$$

$$\langle L_x, y\rangle = L_x(y) = (y, x)_H$$

Määr 2.3 Jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in H$ suppenee heikosti kohti alkiota $x \in H$ jos kaikilla $a \in H^*$

$$\lim_{n\to\infty} \langle a, x_n\rangle = \langle a, x\rangle$$

Merkitsemme

$$x_n \to x \,, \quad \text{tai}$$

$$x_n \xrightarrow{w} x \,, \quad \text{tai}$$

$$\operatorname*{w-lim}_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{tai}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{heikosti.}$$

<u>ESIM</u> Jos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee H:n normitopologiassa kohti alkiota $x \in H$, eli

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{eli}$$

$$x_n \to x \quad \text{eli}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \|_H = 0$$

niin $x_n \xrightarrow{w} x$.

<u>ESIM</u> Olkoon $H = \ell^2$,

$$e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n:s paikka}}}{1}, 0, 0, \ldots)$$

Tällöin kaikilla $L_x \in (\ell^2)^*$, $x \in \ell^2$, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \langle L_x, e_n \rangle = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

eli

$$e_n \xrightarrow{w} 0$$

Huom $\| e_n \|_{\ell^2} = 1$ kaikilla n. Jos $x_n \xrightarrow{*} x$ niin $\| x \| \leq \limsup_{n\to\infty} \| x_n \|_H$ (HT)

Lause (Alaoglu) 2.4 Olkoon H separatiivinen Hilbert avaruus, $B = \{x \in H \mid \|x\|_H < 1\}$. Tällöin B on relatiivisesti kompakti H:n heikossa topologiassa.

Siis: jos $\|x_n\|_H \leq C$, kaikilla n niin on olemassa $x \in H$ ja osajono $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, $n_j \to \infty$ kun $j \to \infty$, s.e.

$$x_{n_j} \xrightarrow{w} x \quad \text{kun} \quad j \to \infty$$

Huomautus Yleisemmin Banach-Alaoglun lauseen nojalla refleksiivisen Banach avaruuden X yksikköpallo on heikosti kompakti.

Tod Olkoon $\{z_k \mid k=1,2,\dots\} \subset H$ tiheä, $f_k = L_{z_k}$ jokaikä, ja $x_n \in B$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Nyt

$$|\langle f_k, x_n \rangle| \le \|f_k\|_{H^*}.$$

Kun $k=1$, voimme valita jonolle $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ osajonon $(x_{1n})_{n=1}^{\infty}$ jolle

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_1, x_{1n} \rangle$$

on olemassa. Valitaan seuraavaksi $(x_{1n})_{n=1}^{\infty}$-jonon osajono $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ jolle

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_2, x_{2n} \rangle$$

on olemassa. Jatkamalla tätä, löydämme jonot $(x_{mn})_{n=1}^{\infty}$, joille $(x_{mn})_{n=1}^{\infty}$ on $(x_{m-1,n})_{n=1}^{\infty}$:n osajono ja

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_k, x_{mn} \rangle$$

on olemassa kaikille $k \le m$.

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \vdots & & & \end{array}$$

Olkoon $y_n = x_{nn}$. Tällöin $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ on jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ osajono, jolle

$$T_k := \lim_{n\to\infty} \langle f_k, y_n \rangle$$

on olemassa kaikilla k. Selvästi

$$|T_n| \le \|f_n\|_{H^*}.$$

Jos nyt $f = L_z \in H^*$, on kaikilla $\varepsilon > 0$ olemassa f_k s.e. $\|f_k - f\|_{H^*} = \|z_k - z\|_H < \frac{\varepsilon}{3}$. Valitaan nyt N_0 s.e.

$$n, m \ge N_0 \Rightarrow |\langle f_k, y_n \rangle - \langle f_k, y_m \rangle| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tällöin

kun $n, m \geq N_0$, pätee

$$|\langle f, y_n\rangle - \langle f, y_m\rangle|$$

$$\leq | \langle f - f_k, y_n\rangle + \langle f_k, y_n - y_m\rangle +$$

$$+ \langle f_k - f, y_m\rangle|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Siispä $(\langle f, y_n\rangle)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono, joten on olemassa $T_f := \lim_{j\to\infty} \langle f, y_n\rangle$.

Siis kaikille $z \in H$ on olemassa

$$a(z) = \lim_{n\to\infty} \langle f, y_n\rangle, \quad f = L_z$$

Selvästi

$$|a(z)| \leq \|f\|_{H^*} = \|z\|_H$$

$$z \mapsto a(z)$$

on lineaarinen. Siispä $a \in H^*$ ja Rieszin lauseen nojalla on $y \in H$ jolle

$$(z, y)_H = a(z) = \lim_{n\to\infty} \langle f, y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} (z, y_n)_H$$

tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $y_n \xrightarrow{*} y$. $\square$

Lemma 2.5 Olkoon $A: H \to H$ rajoitettu lin. operaattori ja $K: H \to H$ kompakti lin. operaattori. Oletetaan, että $\operatorname{w-lim}_{n\to\infty} u_n = u$ H:ssa. Tällöin

$$\operatorname{w-lim}_{n\to\infty} Au_n = Au, \quad \lim_{n\to\infty} Ku_n = Ku$$

Tod. Kaikille $z \in H$ pätee

$$(Au_n - Au, z)_H = (u_n - u, A^* z)_H \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

joten

$$Au_n \xrightarrow{w} Au.$$

Tämä todistaa ensimmäisen väitteen.

Jos $Ku_n \to Ku$ ei ole voimassa, on olemassa osajono $(u_{n_j})_{j=1}^\infty$ ja $\varepsilon_0 > 0$ joille

$$\|Ku_{n_j} - Ku\|_H \geq \varepsilon_0.$$

Toisaalta, koska K on kompakti, jonolla $(Ku_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ on osajono $(Ku_{n_{j_l}})_{l=1}^{\infty}$, joka suppenee kohti jotain H:n alkiota z. Selvästi $z \neq Ku$. Nyt edellisen nojalla

$$\text{w-}\lim_{l\to\infty} Ku_{n_{j_l}} = Ku$$

$$\lim_{l\to\infty} Ku_{n_{j_l}} = z \neq Ku,$$

mikä ei ole mahdollista. Tämä todistaa väitteen.

Yleisesti, jos $T: H \to H$ on Hilbert avaruuden H rajoitettu operaattori, $T^*: H \to H$ on rajoitettu operaattori jolle

$$(Tx, y)_H = (x, T^* y) \quad \text{kaikilla } x, y \in H.$$

Seuraavaksi tiedistamme tarvitsemamme tulokset

<u>Lause 2.6</u> Jos $K: H \to H$ on kompakti, niin $K^*: H \to H$ on kompakti.
(tod. Evans D5)

<u>Lause 2.7</u> (Fredholmin alternatiivi)
Olkoon $K: H \to H$ kompakti. Silloin

1) $\operatorname{Ker}(I+K)$ on äärellisulotteinen
2) $\operatorname{Ran}(I+K)$ on suljettu.
3) $\operatorname{Ran}(I+K) = \ker(I+K^*)^\perp$
4) $\operatorname{Ker}(I+K) = \{0\} \iff \operatorname{Ran}(I+K) = H$
5) $\dim(\operatorname{Ker}(I+K)) = \dim(\operatorname{Ker}(I+K^*))$

(tod. Evans D5, thm. 5)

Tod (Lause 2.4)

Olkoon $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ jono, $u_k \in H$, $\|u_k\|_H \le C$.

Tällöin on olemassa jonon (u_k) osajono $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ ja $u \in H$ joille

(1) $$u_{k_j} \xrightarrow{w} u \quad \text{kun } j \to \infty.$$

Tällöin

$$I_j := \| K^* u_{k_j} - K^* u \|_H^2$$

(2) $$= (K^* u_{k_j} - K^* u , K^* (u_{k_j} - u))_H$$

$$= (K K^* u_{k_j} - K K^* u , u_{k_j} - u)$$

(1):n nojalla

$$\text{w-}\lim_{j \to \infty} K^* u_{k_j} = K^* u.$$

Koska K on kompakti, pätee normitopologiassa

$$\lim_{j \to \infty} K K^* u_{k_j} = K K^* u.$$

(1):n nojalla $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ on rajoitettu, eli on olemassa C s.e. $\|u_j\|_H \le C$ (HT)

Joten

$$I_j \leq 2 \cdot C \cdot \| KK^* u_{k_j} - KK^* u \|_H \xrightarrow{j \to \infty} 0.$$

Siispä

$$\left(K^* u_{k_j} \right)_{j=1}^{\infty}$$

suppenee normitopologiassa. Joten K^* on kompakti. $\square$

Tod. (Lause 2.5)

1) Osoitamme, että $\ker(I+K) < \infty$

Jos näin ei ole, on olemassa $v_j \in H$, $v_j \perp v_k$, $j \neq k$, $v_j \in \ker(I+K)$, $\|v_j\|=1$. Tällöin $(v_j)_{j=1}^\infty$ sisältää osajonon, jolle

$$\lim_{\ell\to\infty} K v_{j_\ell} = w \in H.$$

Nyt

$$v_{j_\ell} = -Kv_{j_\ell} \to w,$$

mutta

$$\|v_{j_\ell} - v_{j_{\ell'}}\|^2 = 2, \quad \ell \neq \ell',$$

joten $(v_{j_\ell})_{\ell=1}^\infty$ ei voi supeta.

Ristiriita osoittaa, että $\dim \ker(I+K) < \infty$, ja väite i pätee.

2.) Näytämme seuraavaksi, että on olemassa $\gamma > 0$ jolle

(1) $$\|u + Ku\| \geq \gamma \|u\| \quad , \quad u \in \operatorname{Ker}(1+K)^{\perp}.$$

Jos (1) ei päde, on olemassa

$$u_n \in H, \quad \|u_n\| = 1$$

$$u_n \perp \ker(1+K) = Y$$

(2) $$\|(1+K)u_n\| < \frac{1}{n}$$

Nyt (2):n nojalla

(3) $$\lim_{n\to\infty} u_n + Ku_n = 0 \quad H\text{:ssa}$$

Koska $\|u_n\| \leq 1$, on olemassa osajono u_{n_j} jolle Ku_{n_j} suppenee H:ssa. Tällöin (3):n nojalla on olemassa $w \in H$,

(4) $$w = \lim_{j\to\infty} -Ku_{n_j} = \lim_{j\to\infty} u_{n_j} \quad H\text{:ssa.}$$

Koska $Y^{\perp}$ on suljettu, $w \in Y^{\perp}$.

Nyt (4):n ja K:n jatkuvuuden nojalla

$$Kw = \lim_{j\to\infty} Ku_{n_j} = -\lim_{j\to\infty} u_{n_j} = -w,$$

eli $w \in \ker(I+K)$. Tällöin $w \in Y \cap Y^{\perp}$, joten

$$\|w\|^2 = (w,w)_H = 0, \text{ eli } w = 0.$$

Koska $u_{n_j} \to w$ H:ssa, $\|u_{n_j}\| = 1$, ei $\|w\| = 0$ ole mahdollinen. Siis (1) pätee jollakin $\gamma > 0$.

3) Olkoon $w_n \in \mathrm{Ran}(I+K)$, $w_n \to w$ H:ssa kun $n \to \infty$. Olkoot $x_n \in H$ alkioita, joille

$$(I+K)x_n = w_n.$$

Olkoon $P : H \to H$ ort. projektio, jolle $\mathrm{Ran}(P) = Y = \ker(I+K)$. Tällöin

$$u_n = (I-P)x_n$$

Toteuttavat

$$(1+K)u_n = (1+K)x_n = w_n,$$

$$u_n \in \ker(1+K)^{\perp} = Y^{\perp}$$

Koska $u_n - u_m \in Y^{\perp}$, pätee (1):n nojalla

$$\|w_n - w_m\| = \|(1+K)(u_n - u_m)\|$$
$$\geq \gamma \|u_n - u_m\|.$$

Koska $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono, on myös $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-jono H:ssa. Se suppenee kohti jotain H:n alkiota $u \in H$, joten

$$w = \lim_{n\to\infty} (1+K)u_n = (1+K)u.$$

Siis $w \in \operatorname{Ran}(1+K)$ joten $\operatorname{Ran}(1+K)$ on suljettu. Siispä väite ii pätee

4). kaikille rajoitetuille $A : H \to H$ pätee

(5) $$\overline{\mathrm{Ran}(A)} = \ker(A^*)^\perp$$

⌈ (5):n todistus: $Y = \mathrm{Ran}\, A$, $Z = \ker(A)$. Nyt

$x \in \mathrm{Ran}(A)^\perp = Y^\perp$

$\Rightarrow$ $(x, Az)_H = 0$ kaikille $z \in H$

$\Rightarrow$ $(A^* x, z)_H = 0$ — // —

$\Rightarrow$ $(A^* x, A^* x)_H = 0 \Rightarrow A^* x = 0$

eli $X^\perp \subset Z$

toisaalta, $x \notin Y^\perp \Rightarrow \exists\, y = Az \in Y$ s.e.

$0 \neq (x, Az)_H = (A^* x, z) \Rightarrow A^* x \neq 0$ eli

$x \notin Z$. Siispä $Z \subset X^\perp$.

Näytimme $Z = X^\perp$. Koska (HT)

$$X^{\perp\perp} = \overline{X},$$

pätee $\overline{X} = (X^\perp)^\perp = Z^\perp$. ⌋

(5):n ja iii:n nojalla

$$\mathrm{Ran}(I+K) = \overline{\mathrm{Ran}(I+K)}$$
$$= \mathrm{Ker}(I+K^*)^{\perp},$$

eli iii pätee.

5) Seuraavaksi näytämme

(6) $$\mathrm{Ker}(I+K) = \{0\} \iff \mathrm{Ran}(I+K) = H.$$

Oletetaan, että $\mathrm{Ker}(I+K) = \{0\}$.
Jos (6) ei päde, on

$\mathrm{Ker}(I+K) = \{0\}$

(7) $$H_1 = (I+K)H \subsetneq H$$

iii:n nojalle $H_1 \subset H$ on suljettu.
Koska $(I+K)$ on injektio, näemme, että
alkiolle $y \in H \setminus H_1$ pätee

$$\underset{\substack{\cap \\ H_1}}{(I+K)y} \notin (I+K)H_1$$

Siispä operaattorille $K_1 = K|_{H_1} : H_1 \to H_1$

$$\operatorname{Ker}(1+K_1) = \{0\}$$

$$\operatorname{Ran}(1+K_1) \neq H_1,$$

jolloin on olemassa H_1:n suljettu aliavaruus

(δ) $$H_2 = (1+K)H_1 \subsetneq H_1 .$$

Voimme toistaa tätä päättelyä, ja löydämme H:n suljetut aliavaruudet

$$H_n = (1+K)^n H$$

$$H_{n+1} \subsetneq H_n .$$

Olkoon

$$u_n \in H_n \cap H_{n+1}^{\perp},$$

$$\|u_n\| = 1$$

Kun $n > m$, pätee

$$Ku_n - Ku_m =$$

$$= \underbrace{(u_n + Ku_n)}_{H_{n+1} \subset H_{m+1}} - \underbrace{(u_m + Ku_m)}_{\in H_{m+1}} - \underbrace{u_n}_{\in H_n \subset H_{m+1}} + u_m$$

$$= a + u_m,$$

missä $a \in H_{m+1}$, $u_m \in H_{m+1}^{\perp}$, $\|u_m\| = 1$

Siispä Pythagoraan lauseen nojalla

(9) $$\| Ku_n - Ku_m \|^2 = \| a + u_m \|^2 = \|a\|^2 + \|u_m\|^2 \geq 1.$$

Toisaalta, koska $\|u_n\| = 1$ ja K on kompakti, jonolla $(Ku_k)_{k=1}^{\infty}$ pitäisi olla suppenevat osajono $(Ku_{n_j})_{j=1}^{\infty}$. (9):n nojalla tämä ei ole mahdollista. Siis olemme näyttäneet

(10) $$\operatorname{Ker}(I + K) = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ran}(I + K) = H.$$

Olkoon nyt $\mathrm{Ran}(I+K) = H$.

Tällöin, koska $K^*: H \to H$ on myös kompakti,

$$\mathrm{Ran}(I+K) = H \overset{(iii)}{\Longrightarrow} \mathrm{Ker}(I+K^*) = \{0\}$$

$$\overset{(10)}{\Longrightarrow} \mathrm{Ran}(I+K^*) = H$$

$$\overset{(iii)}{\Longrightarrow} \mathrm{Ker}(I+K) = \mathrm{Ker}(I+K^{**}) = \{0\}.$$

Siis (6), eli väite (iv) on todistettu.

Väitteen (v) todistus sivuutetaan (ks. Evans, Appendix D5).

$\square$

Olkoot H, $\tilde{H}$ Hilbert avaruuksia
kompaktien operaattorien joukko $K(H,H)$
on avaruuden

$$L(H,\tilde{H}) = \{A : H \to \tilde{H} \mid A \text{ on lineaarinen ja rajoitettu}\}$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_H \leq 1} \|Ax\|_{\tilde{H}}$$

suljettu aliavaruus, eli

<u>Lemma</u> Jos $K_n : H \to \tilde{H}$ ovat kompakteja, $A : H \to \tilde{H}$ on rajoitettu operaattori jolle

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n - A\| = 0,$$

niin A on kompakti.

tod. HT.

Lause Olkoon $s > t$. Tällöin identtinen kuvaus

$$I : H^s(T^n) \to H^t(T^n)$$

on kompakti.

Tod. Kun $u \in H^s(T^n)$,

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{u}_m \underbrace{e^{2\pi i m \cdot x}}_{= e_m(x)},$$

missä

$$\|u\|^2_{H^s} = \|\hat{u}_m\|^2_{\ell^2_s} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle m \rangle^{2s} |\hat{u}_m|^2$$

Siis kuvaus $\mathcal{F} : u \mapsto (\hat{u}_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on isometrinen isomorfismi

$$\mathcal{F} : H^s(T^n) \to \ell^2_s.$$

Riittää näyttää, että identtinen kuvaus

$$I : \ell^2_s \to \ell^2_t$$
$$(a_m) \to (a_m)$$

on kompakti.

Kuvaus $I_N : \ell^2_s \to \ell^2_t$,

$$I_N : (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\chi_N(n)\, a_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

$$\chi_N(n) = \begin{cases} 1, & |n| \le N \\ 0, & |n| > N \end{cases}$$

on äärellisulotteinen,

$$\dim(\mathrm{Ran}(I_N)) < \infty.$$

Koska $\mathbb{R}^k$:n rajoitetut joukot ovat relatiivisesti kompakteja, on $I_N : \ell^2_s \to \ell^2_t$ kompakti. Nyt

$$\|(I_N - I)(a_n)\|_{\ell^2_t}$$
$$\le \sum_{|n|>N} \langle n\rangle^t |a_n|^2$$
$$\le \sum_{|n|>N} N^{t-s} \langle n\rangle^s |a_n|^2$$
$$\le \frac{1}{N^{s-t}} \|(a_n)\|_{\ell^2_s}.$$

näemme, että

$$\lim_{N\to\infty} \| I_N - I \|_{L(\ell_s^2, \ell_t^2)} = 0 .$$

Siispä $I : \ell_s^2 \to \ell_t^2$ on kompakti. $\square$

Lause Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, rajoitettu, C^k-sileä alue, $k \geq m$, $k, m \in \mathbb{N}$. Tällöin identtinen kuvaus

$$I : H^k(\Omega) \to H^m(\Omega)$$
$$Iu = u$$

on kompakti.

<u>Tod</u> Kompaktin K ja rajoitetun lineaarisen kuvauksen T kompositiot $T \circ K$ ja $K \circ T$ ovat kompakteja.

Voimme olettaa, että $\overline{\Omega} \subset D = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n \subset \mathbb{R}^n$

määritellä

$$X^k = \{ u \in H^k(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}(u) \subset D \}$$

$$Y^k = \{ u \in H^k(T^n) \mid \operatorname{supp}(u) \subset D \},$$

missä $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = [-1, 1]^n / \sim$ on n-torus. Selvästi

$$J_1 : X^k \to Y^k, \quad u \mapsto u|_{(-1,1)^n}, \qquad J_2 : Y^m \to X^m, \quad u \mapsto \begin{cases} u(x), & x \in (-1,1)^n \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

ovat isometrisiä isomorfismeja.

Olkoon

$$E : H^k(\Omega) \to H^k(\mathbb{R}^n)$$

rajoitettu kuvaus, jolle

$$(Eu)|_\Omega = u,$$

ja
$$T : H^m(\mathbb{R}^n) \to H^m(\Omega)$$
$$Tw = w|_\Omega$$
rajoittumakuvaus. Nyt identtinen kuvaus
$$I : H^k(\Omega) \to H^m(\Omega)$$
$$u \mapsto u$$
voidaan kirjoittaa kuvauksen $I_0 : H^k(T^n) \to H^m(T^n)$ avulla,

$$\underset{\in H^k(\Omega)}{u} \mapsto \underset{\in X^k}{Eu} \mapsto \underset{\in Y^k}{J_1 Eu} \to \underset{\in Y^m}{I_0 J_1 Eu} \to$$

$$\to \underset{\in X^m \subset H^m(\mathbb{R}^n)}{J_2 I_0 J_1 Eu} \to \underset{\in H^m(\Omega)}{u = T J_2 I_0 J_1 Eu},$$

eli

$$I = T J_2 I_0 J_1 E.$$

Koska I_0 on kompakti, muut kuvaukset rajoitettuja, on I kompakti. $\square$

Mainitsemme seuraavat tulokset ilman todistusta

Lause (Arzela–Ascoli) Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti joukko ja $\{f_j\}_{j\in J}$ perhe tasaisesti rajoitettuja yhtäjatkuvia funktioita. Tällöin $\overline{\{f_j\}_{j\in J}}$ sulkeuma on kompakti $C(K)$:ssa. (eli joukko on relatiivisesti kompakti)

<u>Seuraus</u>: Jos $f_j \in C^1(K)$, $j = 1, 2, \ldots$, $K = \overline{B(0, R+1)}$, ja $\|f_j\|_{C^1(K)} \leq C$, $j = 1, 2, \ldots$ niin

$$|f_j(x) - f_j(z)| \leq \|\nabla f\|_\infty \cdot |x - z|$$

$$|f_j(x)| \leq \|f_j\|_\infty .$$

Joten $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset C(K)$ on relatiivisesti kompakti

<u>Seuraus II</u> Jos $K = \overline{B(0, R+1)}$, $f_j \in C^{k+1}(K)$,

$$\|f_j\|_{C^{k+1}(K)} \leq C, \quad j = 1, 2, \ldots$$

niin $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ on relatiivisesti kompakti $C^k(K)$:ssa. Siis $I : C^{k+1}(\overline{\Omega}) \to C^k(\overline{\Omega})$ on kompakti.