Epähomogeeniset reuna-arvot Dirichlet-ongelmalle

Tarkastellaan ongelmaa

$$Lu = f \quad \Omega\text{:ssa}$$
$$u|_{\partial\Omega} = h.$$

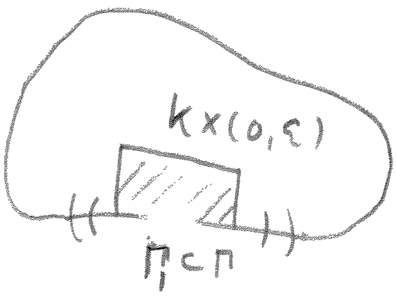
Oletetaan, että $\partial\Omega$ on C^2-sileä ja $h \in C^2(\partial\Omega)$, ($\Omega$ on avoin ja rajoitettu)

Kun $\Gamma \subset \partial\Omega$ on avoin ja litteä, ts. $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ ja $\Gamma_1 \subset \overline{\Gamma}_1 \subset \Gamma$ on avoin, määritellään h:n paikallinen jatko.

$$(J_0 h)(x', x_n) = h(x') \cdot \eta(x') \cdot \phi(x_n)$$

missä $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $\eta|_{\Gamma_1} = 1$, $K = \mathrm{supp}(\eta) \subset \Gamma$, $\phi \in C_0^\infty((-2\varepsilon, 2\varepsilon))$, $\phi|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} = 1$ ja η ja $\varepsilon > 0$ on valittu niin, että $K \times (0, \varepsilon) \subset \Omega$.
Tällöin, jos $\mathrm{supp}(h) \subset \Gamma_1$ pätee

$$J_0 h \in C^2(\overline{\Omega}), \quad J_0 h|_{\partial\Omega} = h$$



Yleiselle, ei-litteälle reunalle $\partial\Omega$ käytämme reunan avointa peitettä V_j, $j=1,\dots,N$ reunan litistyskuvauksia

$$\Phi_j : V_j \to \tilde{V}_j = B(0,\rho_j)$$

$$V_j \cap \Omega \to \tilde{V}_j \cap \mathbb{R}^n_+ ,$$

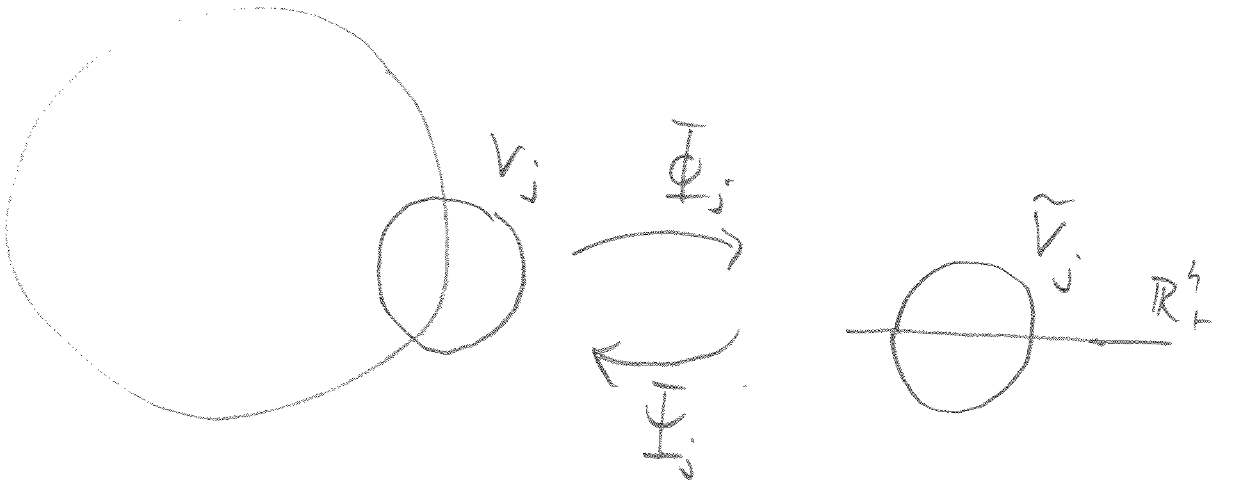
$$\Psi_j = \Phi_j^{-1} : \tilde{V}_j \to V_j$$

jotka ovat C^2-sileitä, ja ykkösen ositusta

$$\theta_j \in C_0^\infty(V_j), \quad \sum_{j=1}^N \phi_j(x) = 1, \quad x \in \partial\Omega.$$

Tällöin kuvaus

$$J\, h \mapsto \sum_{j=1}^n \Big(J_0\big[(h \cdot \theta_j) \circ \Psi_j \big] \Big) \circ \Phi_j$$



Toteutetaan

$$J : C^2(\partial\Omega) \to C^2(\bar{\Omega})$$ jatkuva, lineaarinen

$$Jh\big|_{\partial\Omega} = h.$$

Sanomme, että $u \in H^1(\Omega)$ on tehtävän

$$\begin{cases} Lu = f & \Omega\text{:ssa} \\ u\big|_{\partial\Omega} = h \end{cases}$$

heikko ratkaisu, jos $u = w + Jh$, missä $w \in H_0^1(\Omega)$ on tehtävän

$$(*) \qquad \begin{cases} Lw = f - L(Jh) \\ w\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

heikko ratkaisu.

<u>Huom</u> $(*)$:stä seuraa, että

$$L(w + Jh) = f \qquad \Omega\text{:ssa}$$

$$w + Jh\big|_{\partial\Omega} = h$$

__Huomautus__ Ylläoleva voidaan tehdä samaan tapaan kun $\partial\Omega \in C^1$, $h \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Tällöin

$$H = Jh \in H^1(\Omega)$$

$$Tr(Jh) = h$$

$$LH \in H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)'$$

Mainitsemme seuraavat tulokset ilman todistusta

__Lause 2.8__ Olkoon Ω rajoitettu, avoin C^k-alue, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\frac{1}{2} < s < k$. Tällöin kuvauksella

$$Tr_{\partial\Omega} : H^s(\Omega) \to H^{s-1/2}(\partial\Omega)$$

on oikeanpuoleinen, jatkuva lineaarinen käänteiskuvaus

$$Z : H^{s-1/2}(\partial\Omega) \to H^s(\Omega),$$

$$(Tr_{\partial\Omega} Z)\phi = \phi.$$

__Tod__. [Renardy-Rogers, thm 6.108. kun $k=s$]

__Lause 2.9__ Olkoon Ω kuten yllä, $k=1$. Silloin

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid Tr_{\partial\Omega} = 0 \}$$

__tod__ [RR, thm 6.110]

Neumann-reunaehto (ja Robin reunaehto)

Tarkastellaan yhtälöä

$$(N) \quad \begin{cases} Lu = f & \Omega\text{:ssa} \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \rho u|_{\partial\Omega} + h, & \partial_\nu u := \nu \cdot a\nabla u|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

missä $\rho \in C^1(\partial\Omega)$ on Robin-funktio.

Jos $a^{jk}, b^j, c \in C^1(\bar{\Omega})$, $u \in C^2(\Omega)$, ja (N) on voimassa pisteittäin, pätee kaikille $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega f \phi \, dx = \int_\Omega Lu(x) \cdot \phi(x) \, dx$$

$$= \int_\Omega (-\nabla \cdot a \nabla u + b \cdot \nabla u + cu) \phi \, dx$$

$$= \int_\Omega \left(a\nabla u \cdot \nabla \phi + (b \cdot \nabla u)\phi + cu\phi\right) dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} (-\nu \cdot a \nabla u \cdot \phi) \, dS_x$$

eli

$$L[u,\phi] - \int_{\partial\Omega} p u|_{\partial\Omega} \cdot \phi|_{\partial\Omega} \, dS_x$$

(NW)

$$= \int_{\Omega} f\phi \, dx + \int_{\partial\Omega} h(\phi|_{\partial\Omega}) \, dS_x$$

<u>Määr 2.10</u> Sanomme, että $u \in H^1(\Omega)$ on reuna-arvo-ongelman (missä L on elliptinen, $\partial\Omega$ C^1-alue)

(N) $$\begin{cases} Lu = f & \Omega\text{:ssa} \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = pu + h \end{cases}$$

heikko ratkaisu, jos $f \in H^1(\Omega)'$, $h \in H^{1/2}(\partial\Omega)'$

$$\tilde{L}[u,\phi] :=$$

$$L[u,\phi] + \int_{\partial\Omega} p(Tr_{\partial\Omega} u) \cdot (Tr_{\partial\Omega} \phi) \, dS_x$$

$$= \langle \phi, f \rangle_{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)'} + \langle Tr\,\phi, h \rangle_{H^{1/2} \times (H^{1/2})'}$$

kaikille $\phi \in H^1(\Omega)$

Huomautus Jos $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\partial\Omega)$, voimme tulkita nämä funktiot myös alkioiksi $f \in (H^1(\Omega))'$, $h \in (H^{1/2}(\partial\Omega))'$, joille

$$\langle f, \psi \rangle = \int_\Omega f(x)\,\psi(x)\,dx, \quad \psi \in H^1(\Omega)$$

$$\langle h, \psi \rangle = \int_{\partial\Omega} h(x)\,\psi(x)\,dS_x \quad \psi \in H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega).$$

Lause 2.11 Olkoon Ω, L, ρ kuten yllä. Silloin on $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ s.e. kaikille $\lambda \geq \lambda_0$, $f \in (H^1(\Omega))'$, $h \in (H^{1/2}(\partial\Omega))'$ yhtälölle

$$(L+\lambda)u = f \quad \Omega\text{:ssa}$$
$$\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \rho u|_{\partial\Omega} + h$$

on heikko ratkaisu.

tod. HT.

3 Elementtimenetelmän perusteet (FEM)

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, rajoitettu C^1-alue.

Tarkastellaan muotoa

$$B[u,w] = \int_\Omega \Big(\sum_{j,k=1}^{n} a^{jk} \partial_j u \cdot \overline{\partial_k w} + \sum_{j=1}^{n} b^j \partial_j u \cdot \overline{w} + c u \overline{w} \Big) dx$$

$u, w \in H_0^1(\Omega)$, $a^{jk}, b^j, c \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}$

Oletetaan, että a^{jk} toteuttaa elliptisyysehdon

$$\mathrm{Re} \sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}(x)\, \xi_j \overline{\xi_k} \geq C|\xi|^2, \quad \text{m.k. } x \in \Omega, \ \xi \in \mathbb{C}$$

Ja että on olemassa $\alpha, \beta > 0$ s.e.

$$(1) \quad \begin{aligned} |B[u,w]| &\leq \alpha \|u\|_{H^1} \cdot \|w\|_{H^1} \\ |B[u,u]| &\geq \beta \|u\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

$u, w \in H_0^1(\Omega) = X$, Olkoon $F \in X'$.

Muistutamme, että differentiaaliyhtälön heikon ratkaisun u löytäminen tarkoittaa tehtävän

$$(2) \quad u \in X; \quad B[u, \phi] = \overline{F(\phi)} \quad \text{kaikilla } \phi \in X$$

ratkaisemista.

<u>Galerkinin menetelmä</u> (FEM:n perusmuoto)

1. Olkoon $\hat{V} = \hat{V}_m = \operatorname{span}\{\psi_j\}_{j=1}^{m} \subset X$ äärellisulotteinen aliavaruus

2. Ratkaistaan $\hat{V}$:ssä tehtävä.
   Etsi $\hat{v} \in \hat{V}$ jolle

$$(G) \qquad B[\hat{v}, \psi] = \overline{F(\psi)} \quad \text{kaikille } \psi \in \hat{V}.$$

Lemma 3.1 Tehtävällä (6) on yksikäsitteinen ratkaisu $\hat{v}$, ja se toteuttaa ortogonaalisuusehdon

(3) $$B[\hat{v} - u, \phi] = 0 \quad , \text{ kaikille } \phi \in V$$

missä u on tehtävän (2) ratkaisu.

Tod. Olemassaolo ja yksikäsitteisyys seuraavat käyttämällä Lax-Milgram lemmaa muotoon

$$B_V : V \times V \to \mathbb{C}$$

$$B_V[w_1, w_2] = B[w_1, w_2]$$

ja funktionaaliin $F_V : V \to \mathbb{C}$, $F_V(w) = F(w)$.
Hilbert avaruudessa V, $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_X$;
Koska B_V toteuttaa ehdon (1), tehtävällä

(4) $$B_V[\hat{v}, \phi] = \overline{F_V(\phi)} \quad , \text{ kaikille } \phi \in V$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $v \in V$.

yhtälö (3) saadaan vähentämällä (3) ja (4) toisistaan:

$$B[\hat{v}-u, \phi] = B[\hat{v}, \phi] - B[u, \phi]$$
$$= \overline{F(\phi)} - \overline{F(\phi)} = 0,$$

kun $\phi \in V$.

$\square$

<u>Huomautus:</u> Olkoon $\hat{v} = \sum_{j=1}^{m} v_j \psi_j$.
Tällöin (3) on ekvivalentti lineaarisen yhtälöryhmän

(5) $$\sum_{j=1}^{m} B[\psi_j, \psi_k] v_j = \overline{F(\psi_k)},$$
$k = 1, 2, \dots, m$,

eli

(6) $$B\vec{v} = \vec{F}, \quad B = [B_{jk}]_{j,k=1}^{n}, \quad \vec{v} = [v_j]_{j=1}^{n}, \quad \vec{F} = [F_k]_{k=1}^{n}$$

$$B_{jk} = B[\psi_j, \psi_k]$$
$$F_k = \overline{F(\psi_k)},$$

kanssa.

Galerkinin ratkaisu on "kvasi-optimaalinen" approksimaatio ODY:n heikolle ratkaisulle u avaruudessa V.

<u>Lemma 32</u> (Cea'n lemma) Olkoon $u \in H_0^1(\Omega) = X$ (2):n ratkaisu, $\hat{v} \in V \subset X$ (6):n ratkaisu. Tällöin

(7) $$\|u - \hat{v}\|_X \leq \frac{\alpha}{\beta} \inf_{w \in V} \|u - w\|_X .$$

<u>Tod</u> (3):n nojalla, kaikille $w \in V$ pätee

$$\beta \|u - \hat{v}\|_X^2 \leq |B[u - \hat{v}, u - \hat{v}]|$$

$$\leq |B[u - \hat{v}, u - w] + \underbrace{B[u - \hat{v}, \underbrace{w - \hat{v}}_{\in V}]}_{=0}|$$

$$\leq \alpha \|u - \hat{v}\|_X \cdot \|u - w\|_X$$

Joten

$$\beta \|u - \hat{v}\|_X \leq \alpha \|u - w\|_X . \qquad \square$$

Kuinka avaruus $V = \text{span}\{\psi_k\}_{k=1}^{n}$, eli $\psi_k \in X$ on edullista valita eri n:n arvalla.

Siten, että

1)
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \text{span}\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X \text{ on tiheä.}$$

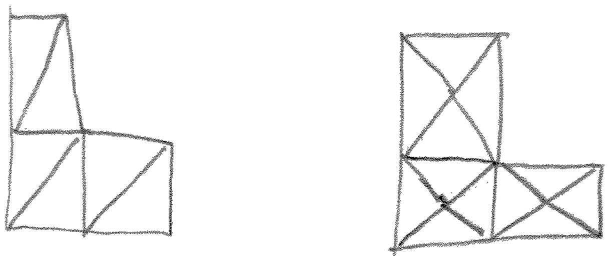
Tällöin tehtävien (6) ratkaisulla $\hat{v}_n \in V_n$ avaruudessa V_n pätee

(8) $$\lim_{n \to \infty} \hat{v}_n = v.$$

2) Siten, että konvergessi (8) on nopeaa

3) Siten, että matriisit $[B_{jk}]_{j,k=1}^{n}$ ja vektorit $[F_k]_{k=1}^{n}$ ovat helposti (tai nopeasti) laskettavissa.

ESIMERKKI Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ on monikulmio, ja kolmioidaan se



$$\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \overline{T}$$

Olkoon V_m = jatkuvien funktioiden $\psi \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1_0(\Omega)$ joukko, joille $\psi|_T$ on kaikille kolmioinnin $\mathcal{T}$ kolmioille T affiini funktio;

$$\psi|_T = a \cdot x + b = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b$$

Avaruuden V_m kannaksi voidaan valita funktiot, joille kolmioinnin kärkipisteissä P_j, $j = 1, 2, 3, \dots, J_m$ pätee

$$\psi_k(P_j) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, \quad P_k \notin \partial\Omega.$$