<u>Määritelmä:</u> $\lambda \in \mathbb{C}$ on elliptisen operaattorin $L: H_0^1 \to H^{-1}$ ominaisarvo, $\lambda \in \sigma(L)$, jos on olemassa $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \neq 0$, jolle

$$(L-\lambda)\phi = 0.$$

Funktio ϕ on λ:n liittyvä ominaisvektori (funktio). Edellisen nojalla kaikilla $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(L)$ on olemassa rajoitettu $(L-\lambda)^{-1}: H^{-1} \to H_0^1$.

<u>Lause 3.2</u> Ominaisarvot $\sigma(L)$ muodostavat diskreetin joukon ja kaikkiin $\lambda \in \sigma(L)$ liittyvien ominaisfunktioiden joukko on äärellisulotteinen $H_0^1(\Omega)$:n aliavaruus.

<u>Tod</u>. Olkoon $Y_\lambda \subset H_0^1(\Omega)$ ominaisarvoon λ liittyvien ominaisfunktioiden avaruus. Selvästi Y_λ on lineaarinen aliavaruus.
Jos $\dim(Y_\lambda) = \infty$, voidaan valita $\phi_k \in Y_\lambda$ s.e. $(\phi_j, \phi_k)_{H_0^1} = \delta_{jk}$.

Olkoon $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ sellainen, että $L+\lambda_0$ on kääntyvä. Nyt

$$(L+\lambda_0)\phi_j = (\lambda+\lambda_0)\phi_j$$

eli

$$\phi_j = (\lambda+\lambda_0)(L+\lambda_0)^{-1}\phi_j$$

Nyt $(\lambda+\lambda_0)(L+\lambda_0)^{-1} : Y_\lambda \to Y_\lambda$ on identtinen operaattori, mutta kompakti, kun Y_λ varustetaan $H^1_0(\Omega)$:n topologialla. Tästä seuraa, että $\dim Y_\lambda < \infty$ (HT).

Oletetaan seuraavaksi, että $\sigma(L)$ ei ole diskreetti, t.s. on $\lambda_j \neq \mu$, $\lambda_j \neq \lambda_k$

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \mu,$$

$\lambda_j \in \sigma(L)$, eli on $\phi_j \in H^1_0(\Omega)$, Jolle

$$(L-\lambda_j)\phi_j = 0 \, .$$

Voi $\quad \|\phi_j\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$

Olkoon $\quad r \in \mathbb{R}, \quad r > \lambda_0, \quad r \neq \mu.$

Tällöin $\quad (L+r)^{-1}$ on rajoitettu $H^{-1} \to H_0^1$, joten $K = (L+r)^{-1} : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ on kompakti. Lisäksi

$$(L + \lambda_j + r - \lambda_j)\varphi_j = (r-\lambda_j)\varphi_j,$$

eli

$$(L+r)\varphi_j = (r-\lambda_j)\varphi_j \in H_0^1(\Omega)$$

joten

$$\varphi_j = (r-\lambda_j) K \varphi_j$$

eli

$$K\varphi_j = \frac{1}{r-\lambda_j}\varphi_j .$$

Siis $\quad \eta_j = \dfrac{1}{r-\lambda_j}$ ovat K:n ominaisarvoja,

$\eta_j \neq \eta_h$ kun $j \neq h$,

$$\lim_{j\to\infty} \eta_j = \frac{1}{r-\mu} \neq 0.$$

Tämä ei ole mahdollista koska $K: H_0^1 \to H_0^1$ on kompakti $\lightning$. $\square$

Lemma 3.3 Olkoon L elliptinen ja symmetrinen, $L^* = L$. Tällöin tarpeeksi isolla $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ operaattori $(L + \lambda_0) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ on kääntyvä ja

$$(L + \lambda_0)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

on operaattori, jonka käänteisoperaattori

$$S = (L + \lambda_0)^{-1}\Big|_{L^2(\Omega)} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

on symmetrinen ja kompakti.

Tod. Aiemmin on osoitettu, että kun λ_0 on tarpeeksi iso, $(L + \lambda_0)^{-1} : H^{-1} \to H_0^1$ on rajoitettu. Koska $I : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ on rajoitettu ja $I : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ on kompakti, on S kompakti.

Olkoon $f, g \in L^2(\Omega)$ ja

$$u = (L+\lambda_0)^{-1} f \in H^1_0$$
$$w = (L+\lambda_0)^{-1} g \in H^1_0$$

Tällöin yhtälöt

$$\begin{cases} (L+\lambda_0) u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} (L+\lambda_0) w = g & \Omega\text{:ssa} \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Toteutuvat heikosti. Tällöin

$$u = Sf, \quad w = Sg$$

kaikilla $\psi, \phi \in H^1_0(\Omega)$

$$L_{\lambda_0}[u, \phi] = \int_\Omega \left(a\nabla u \cdot \nabla\bar{\phi} + b\nabla u \cdot \bar{\phi} + (c+\lambda_0) u\bar{\phi}\right) dx$$
$$= \langle f, \bar{\phi} \rangle_{H^{-1}, H^1_0},$$

$$L_{\lambda_0}[\phi, \psi] = \overline{L_{\lambda_0}[\psi, \phi]}$$

Nyt

$$(f, Sg)_{L^2} = \int_\Omega f \cdot \overline{Sg}\, dx$$

$$= \langle f, \overline{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1_0}$$

$$= L_{\lambda_0}[u, w]$$

$$= \overline{L_{\lambda_0}[w, u]}$$

$$= \overline{\langle g, \overline{u} \rangle}$$

$$= \overline{(g, Sf)}_{L^2}$$

eli

$$(f, Sg)_{L^2} = (Sf, g)_{L^2},$$

eli

$$S = S^*. \qquad \square$$

Lause 3.4 Olkoon $L : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ elliptinen, $L = L^*$, missä Ω on rajoitettu C^1-sileä alue. Tällöin

1) L:n ominaisarvot λ_j ovat reaalisia ja niitä vastaavat ominaisavaruudet $\ker(L-\lambda_j)$ ovat äärellisulotteisia. Ominaisarvot voidaan numeroida niin, että $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$ ja $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$

2) Operaattorille L on ominaisfunktiot $\varphi_j \in H_0^1(\Omega)$, jotka muodostavat täydellisen ortonormaalin kannan avaruudessa $L^2(\Omega)$.

3) Jos $w \notin \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ ja $f \in L^2(\Omega)$, yhtälölle

$$(L-w)u = f$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

on ratkaisu joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$u(x) = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\lambda_j - w} (f, \varphi_j)_{L^2} \varphi_j(x)$$

missä sarja suppenee $L^2(\Omega)$:ssa

Tod Olkoon $S = (L+r)^{-1}\Big|_{L^2(\Omega)} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

missä $r > 0$ on tarpeeksi suuri.

Nyt S on kompakti ja symmetrinen, joten on olemassa $\mu_j \in \mathbb{R}$, $\mu_j \to 0$ kun $j \to \infty$, ja ortonormaali $L^2(\Omega)$:n kanta $(\phi_j)_{j=1}^{\infty}$, joille

$$(S - \mu_j)\phi_j = 0$$

Nyt $S\phi = 0 \Rightarrow (L+r)\phi = 0$ mikä ei ole mahdollista, joten $\mu_j \neq 0$.

Koska

$$\phi_j = \mu_j^{-1} S\phi_j = \mu_j (L-r)^{-1}\phi_j \in H_0^1(\Omega)$$

pätee

$$(L+r)\phi_j = (L+r)\frac{1}{\mu_j}(L+r)^{-1}\phi_j = \frac{1}{\mu_j}\phi_j.$$

Siispä

$$L\phi_j = \left(\frac{1}{\mu_j} - r\right)\phi_j, \quad \phi_j \in H_0^1(\Omega)$$

joten $\lambda_j := \frac{1}{\mu_j} - r$ ovat L:n ominaisarvoja ja ϕ_j L:n ominaisfunktiot.

Toisaalta, jos

$$(L-\lambda)\phi = 0, \quad \phi \in H_0^1(\Omega),\ \phi \neq 0$$

on

$$(L+r)\phi = (\lambda+r)\phi \in L^2(\Omega)$$

jolloin $\lambda \neq -r$ ja

$$\phi = S(\lambda+r)\phi$$

$\Rightarrow$

$$S\phi = \frac{1}{\lambda+r}\phi.$$

Siis ϕ on S:n ominaisvektori.

Saimme:

(λ, ϕ) on L:n ominaisarvo ja -funktio

joss

$\left(\frac{1}{\lambda+r}, \phi\right)$ on S:n ominaisarvo ja -funktio.

Nyt S on injektio, joten sillä on ääretön määrä ominaisarvoja ($\mathcal{H}$, S on kompakti)

Nyt
$$\lambda_j = \frac{1}{\mu_j} - r, \quad \mu_j \to 0 \text{ kun } j \to \infty$$
joten
$$\lim_{j \to \infty} |\lambda_j| = \infty.$$
Koska
$$\liminf_{j \to \infty} \lambda_j \neq -\infty,$$
on
$$\lim_{j \to \infty} \lambda_j = \infty.$$

Tästä 1) ja 2) seuraavat.

Kun $\omega \notin \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, $(L-\omega)^{-1}$ on kääntyvä. Olkoon nyt $u \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ yhtälön $(L-\omega)u = f$ ratkaisu. Tällöin
$$(u, \phi_j)_{L^2} = \frac{1}{\lambda_j - \omega}(f, \phi_j)_{L^2},$$
(HT) josta 3) seuraa. □

Esimerkki Olkoon $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ yhtälön

$$(\partial_t - \Delta) u(x,t) = 0 \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \text{:ssa}$$
$$u(x,t)\big|_{x \in \partial\Omega} = 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$

ratkaisu. Tällöin merkitsemällä

$$u_j(t) = \int_\Omega u(x,t) \overline{\phi_j(x)}\, dx = (u(\cdot,t), \phi_j)_{L^2}$$

$$(-\Delta - \lambda_j) \phi_j(x) = 0$$
$$\phi_j|_{\partial\Omega} = 0$$
$$(\phi_j, \phi_h)_{L^2(\Omega)} = \delta_{jh}$$

nähdään että

$$\partial_t u_j(t) = \int_\Omega \partial_t u(x,t) \phi_j(x)\, dx$$
$$= \int_\Omega \Delta u(x,t) \cdot \phi_j(x)\, dx$$
$$= \int_\Omega u(x,t)\, \Delta \phi_j(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\phi_j} - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{u} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\Big) ds$$

$$= -\int_\Omega u(x,t)\, \lambda_j \phi_j(x)\, dx$$

$$= -\lambda_j u_j(t)$$

ja
$$u_j(0) = f_j = (f, \phi_j)_{L^2}.$$

Siispä
$$u_j(t) = e^{-\lambda_j t} u_j(0) = e^{-\lambda_j t} f_j,$$

joten
$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \phi_j)_{L^2} \cdot e^{-\lambda_j t} \phi_j(x)$$

missä summa suppenee ainakin $L^2(\Omega)$:ssa kaikilla $t \geq 0$.

Seuraavaksi tarkastelemme kysymystä, onko u jossain paremmassa funktioavaruudessa, ja vastaavasti y.o. summan suppeneminen todistaa tässä avaruudessa.

4 Säännöllisyysestimaattej

Tässä luvussa $u, f : \Omega \to \mathbb{R}$ eli u, f ovat reaalisia. Tarkastellaan funktiota $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, jolle

$$-\Delta u = f \qquad \mathbb{R}^n\text{:ssä},$$

missä $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Tällöin ottamalla Fourier-muunnos, saamme

$$|\xi|^2 \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

joten

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\ &\leq 2 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\hat{u}(\xi)|^2 + |\xi|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \right) d\xi \\ &\leq 2 \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right). \end{aligned}$$

Samoin nähdään

$$\|u\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^n)} \leq C_s \left(\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \right)$$

Jos nyt $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ ovat avoimia,

$\Omega_2 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \Omega_1$; eli $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1$,

on olemassa (HT) $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathrm{supp}(\phi) \subset \Omega_2$$

$$\phi\big|_{\Omega_1} = 1.$$

Jos nyt $u \in L^2(\Omega_2)$, $f \in L^2(\Omega_2)$

$$-\Delta u = f \quad \Omega_2\text{:ssa}$$

$$u\big|_{\partial\Omega_2} = 0,$$

niin

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_2)} = \int_{\Omega_2} (\nabla u \cdot \nabla u + |u|^2)\, dx$$

$$\overset{u|_{\partial\Omega_2}=0}{=} \int_{\Omega} u(-\Delta u)\, dx + \|u\|^2_{L^2}$$

$$\leq \|u\|_{L^2} \cdot \|f\|_{L^2} + \|u\|^2_{L^2}$$

Joten

$$\|u\|_{H^1} \cdot \|u\|_{L^2} \leq \|u\|^2_{H^1}$$

$$\leq \|u\|_{L^2} \left(\|u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} \right)$$

Josta nähdään

$$\|u\|_{H^1} \leq \|u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}$$

Nyt

$$-\Delta u = f$$

Joten kun $w = \phi(x) u(x)$,

$$g := -\Delta w = \phi \underbrace{(-\Delta u)}_{= f} + 2 \nabla u \cdot \nabla \phi + u \Delta \phi .$$

koska $\mathrm{supp}(\phi) \subset \Omega_2$,

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega_2)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u\|_{L^2(\Omega_2)} \right)$$

<u>geneerinen</u> vakio C riippuu $\|\phi\|_{C^2(\mathbb{R}^1)}$:stä.

Siispä

$$\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \leq C \cdot \|u\|_{L^2(\Omega_2)} ,$$

$$\|-\Delta w\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \cdot \|u\|_{H^1(\Omega_2)},$$

Saamme

$$\|w\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \cdot \left(\|-\Delta w\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right)$$

$$\leq C \cdot \|u\|_{H^1(\Omega_2)}$$

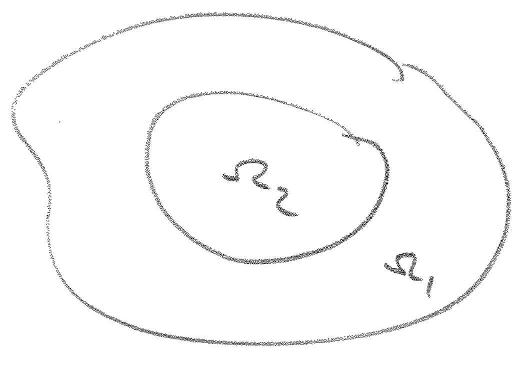
Koska alueessa Ω_1 $w|_{\Omega_1} = u$,
pätee

$$\|u\|_{H^2(\Omega_2)} \leq \|w\|_{H^2(\Omega_2)}$$

$$\leq C \cdot \left(\|u\|_{L^2(\Omega_1)} + \|f\|_{L^2(\Omega_1)} \right)$$

Samoin nähdään

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega_2)} \leq C_s \left(\|u\|_{H^s(\Omega_1)} + \|f\|_{H^s(\Omega_1)} \right)$$



<u>Määr 4.1</u> Olkoon $u \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \Omega$, $\mathrm{dist}(V, \partial\Omega) = h_0 > 0$.

Kun $0 < |h| < h_0$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, määritellään h-differenssi suuntaan k,

$$D_k^h u(x) = \frac{1}{h}\big(u(x + he_k) - u(x)\big), \quad x \in V,$$

$$e_k = (0, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k:s \text{ paikka}}}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

<u>Lause 4.2</u> Olkoon $V, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ kuten yllä, $V \subset\subset \Omega$. Ol. $0 < h < \frac{h_0}{2}$, $h_0 = \mathrm{dist}(V, \partial\Omega)$.

a) Silloin on olemassa C s.e. kaikille $0 < h < \frac{h_0}{2}$

$$\|D_k^h u\|_{L^2(V)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

b) Jos $u \in L^2(\Omega)$ ja $\exists\, C_0 > 0$ s.e. $\forall\, 0 < |h| < h_0/2$, k,

$$\|D_k^h u\|_{L^2(V)} \leq C_0,$$

niin $\quad u \in H^1(V)$ ja

$$\|\nabla u\|_{H^1(V)} \le C_0.$$

Tod. Olet. $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $x \in V$, $h \in (0, \frac{h_0}{2})$. Silloin

$$u(x+he_k) - u(x) = \int_0^1 u_{x_k}(x+the_k)\,dt \cdot h$$

Joten

$$|D_k^h u(x)| \le \int_0^1 |\partial_k u(x+the_k)|\,dt.$$

Tällöin Jensenin epäyhtälön (tai Schwartzin)

$$\int_V |D_k^h u(x)|^2 dx \le \int_V \int_0^1 |(\partial_{x_k} u)(x+the_k)|^2\,dt\,dx$$

$$\le \int_0^1 \int_V |\partial_{x_k}[u(x+the_k)]|^2\,dx\,dt$$

$$\le \int_0^1 \|\partial_{x_k} u\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt = \|\partial_{x_k} u\|^2_{L^2(\Omega)} \cdot 1.$$

Tästä (a) seuraa, kun $u \in C^1(\bar{\Omega})$.
Tiheysargumentin nojalla (a) pätee kun $u \in H^1(\Omega)$.

b) Suora lasku osoittaa että kun

$u \in H^1(\Omega)$, $\phi \in C_0^\infty(V)$, niin pienillä h

$$\int_V u \cdot D_k^h \phi \, dx = -\int_V D_k^{-h} u \cdot \phi \, dx$$

(tod: HT, suora lasku)

Oletuksen nojalla

$$\sup_{0<|h|<h_0} \| D_k^{-h} u \|_{L^2(V)} \le C_0 < \infty.$$

Alaoglun lauseen nojalla on olemassa funktio $w_k \in L^2(V)$ ja jono $h_j \to 0$, $j \to \infty$ jolle

$$w_k = w\text{-}\lim_{j\to\infty} D_k^{-h_j} u \quad L^2(V)\text{:ssä}$$

Tällöin kaikille $\phi \in C_0^\infty(V)$ pätee Lebesguen dom. konvergenssilauseen ja väliarvolauseen nojalla

$$\int_V u \cdot \partial_k \phi \, dx = \lim_{j\to\infty} \int_V u \cdot D_k^{h_j} \phi \, dx$$

$$= \lim_{j\to\infty} - \int_V D_k^{h_j} u \cdot \phi \, dx$$

$$= - \int_V w_k \phi \, dx .$$

Siispä $D_{x_k} u = w_k$ $L^2(V)$:ssä (heikossa mielessä), joten $u \in H^1(V)$.

Koska $\|w_k\|_{L^2(V)} \leq \liminf \|D_k^{-h_j} u\|_{L^2(V)} \leq C_0$,

väite (b) pätee □

Lause 4.3 Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin.

Jos $a^{jk} \in C^1(\bar{\Omega})$, $V \subset\subset \Omega$, $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega)$, $Lu = \sum_{j,k=1}^{n} -D_j(a^{jk}(x) D_k u(x))$ elliptinen,

$$Lu = f \quad \Omega\text{:ssa}$$

niin $u \in H^2(V)$ ja on olemassa jäsenistä riippumaton $C > 0$ jolla

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})$$

Huom. Sama pätee kun $L = -\nabla \cdot a\nabla + b \cdot \nabla + c$