3 Fredholmin alternatiivi ODY:lle

Olkoon L elliptinen ODO

$$Lv = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j (a^{jk}(x)\partial_k v) + \sum_{j=1}^{n} b^j(x)\partial_j v + c(x)v(x).$$

missä $a^{jk}, b^j, c \in L^\infty(\Omega)$, $a^{jk} = \overline{a^{kj}}$ m.k.

Kun $b^j \in C^1(\overline{\Omega})$, määrittelemme L:n **formaalin** adjungaatin L^*,

$$L^*v = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j (a^{jk}(x)\partial_k v)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} -\partial_j (\overline{b^j(x)}\, v(x)) + \overline{c(x)}\, v(x).$$

Kun $v, w \in H^1_0(\Omega)$, pätee

(⊕) $$L[v,w] = \overline{L^*[w,v]}, \quad L[v,w] := \langle \underset{H^{-1}}{Lv}, \underset{H^1_0}{\overline{w}} \rangle$$

Jos $a^{jk} \in C^1(\overline{\Omega})$, $v, w \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, pätee (HT)

$$\int_\Omega Lv \cdot \overline{w}\, dx = \int_\Omega v \cdot \overline{L^* w}\, dx$$

(0) voidaan kirjoittaa

$$\langle Lu, \overline{w} \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} = \langle u, L^* w \rangle_{H_0^1 \times H^{-1}}.$$

Lause 3.1 Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu C^1-alue, L elliptinen. Tällöin kaikille $\mu \in \mathbb{C}$ seuraavat ehdot (A) ja (B) ovat yhtäpitäviä:

(A) Kaikille $f \in H^{-1}(\Omega)$ yhtälöllä

$$\begin{cases} (L - \mu) u = f & \Omega\text{:ssa} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

on olemassa kaikki ratkaisu $u \in H_0^1(\Omega)$,

(B) Homogeeniselle yhtälölle

(2) $$\begin{cases} (L - \mu) u = 0 & \Omega\text{:ssa} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

on olemassa vain kaikki ratkaisu $u \equiv 0$.

Oletetaan, että $L=L^*$, ja että (B) ei päde. Kun $f\in H^{-1}(\Omega)$, niin yhtälöllä (1) olemassa ratkaisu jos ja vain jos

$$\langle f, w\rangle = 0$$

kaikille $w\in H^1_0(\Omega)$, jotka ovat yhtälön

$$\begin{cases} (L^* - \bar{\mu})w = 0 & \Omega\text{:ssa} \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

heikkoja ratkaisuja.

<u>tod</u> Olkoon $\lambda_0\in\mathbb{R}_+$ sellainen, että että $A=(L+\lambda_0): H^1_0(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ on kääntyvä, eli $(L+\lambda_0)^{-1}$ on rajoitettu. Sillain merkitsemällä $B=(-\lambda_0-\mu)I$

$$(1) \iff (A+B)u = f$$

$$\iff (I + A^{-1}B)u = A^{-1}f$$

Nyt $B: H^1_0(\Omega)\subset H^1(\Omega)\to L^2(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ on kompakti, Koska $A^{-1}: H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ on isomorfismi, $A^{-1}B: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ on kompakti ja

(A)

$\iff$

(1):llä on ratkaisu kaikilla $f \in H^{-1}(\Omega)$

$\iff$

kaikille $g \in H_0^1(\Omega)$ yhtälöllä

$$(I + A^{-1}B)\, u = g$$

on ratkaisu

$\iff$

$$\operatorname{Ker}(I + A^{-1}B)\, u = 0$$

$\iff$

(2):lle on vain ratkaisu $u \equiv 0$

$\iff$

(B).

Siis (A) $\iff$ (B).

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, jossa

$$L = L^*.$$

Tällöin $L : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ on rajoitettu, ja

$$[u, w] := \langle (L + \lambda_0) u, \overline{w} \rangle, \quad u, w \in H^1_0(\Omega)$$

on sisätulo, joka on ekvivalentti $H^1_0(\Omega)$:n tavallisen sisätulon kanssa. Nyt

(2) $$f \in \operatorname{Ran}(L - \mu)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\exists u \in H^1_0(\Omega) : \quad (L - \mu) u = f$$

$$\Longleftrightarrow$$

(3) $$\exists u \in H^1_0(\Omega) : \quad \big(I + \underbrace{A^{-1}(-\mu - \lambda_0)}_{K_\mu}\big) u = A^{-1} f$$

Nyt

$$[(I + K_\mu) u, w] = \langle A (I + K_\mu) u, \overline{w} \rangle$$
$$= \langle (L - \mu) u, \overline{w} \rangle$$

$$= \langle u, \overline{(L-\bar\mu)w} \rangle$$

$$= \overline{\langle (L-\bar\mu)w, u\rangle}$$

$$= \overline{[(I+K_{\bar\mu})w, u]} = [u, (I+K_{\bar\mu})w].$$

Siis $[\cdot,\cdot]$-sisätulon suhteen

$$K_\mu^* = K_\mu.$$

Nyt $(3) \iff A^{-1}f \in \operatorname{Ker}(I+K_{\bar\mu})^\perp$,

eli

$$\langle f, w\rangle = \langle AA^{-1}f, w\rangle =$$
$$= [A^{-1}f, w] = 0$$

kaikille $w \in H_0^1(\Omega)$ joille

$$(I + K_{\bar\mu})w = 0$$

eli

$$(L-\bar\mu)w = 0.$$

$\square$

Määritelmä: $\lambda \in \mathbb{C}$ on elliptisen operaattorin $L : H_0^1 \to H^{-1}$ ominaisarvo, $\lambda \in \sigma(L)$, jos on olemassa $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \neq 0$, jolle

$$(L-\lambda)\phi = 0.$$

Funktio ϕ on λ:n liittyvä ominaisvektori (funktio). Edellisen nojalla kaikilla $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(L)$ on olemassa rajoitettu $(L-\lambda)^{-1} : H^{-1} \to H_0^1$.

Lause 3.2 Ominaisarvot $\sigma(L)$ muodostavat diskreetin joukon ja kaikkiin $\lambda \in \sigma(L)$ liittyvien ominaisfunktioiden joukko on äärellisulotteinen $H_0^1(\Omega)$:n aliavaruus.

Tod. Olkoon $Y_\lambda \subset H_0^1(\Omega)$ ominaisarvoon λ liittyvien ominaisfunktioiden avaruus. Selvästi Y_λ on lineaarinen aliavaruus.
Jos $\dim(Y_\lambda) = \infty$, voidaan valita $\phi_k \in Y_\lambda$ s.e. $(\phi_j, \phi_k)_{H_0^1} = \delta_{jk}$.

Olkoon $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ sellainen, että $L+\lambda_0$ on kääntyvä. Nyt

$$(L+\lambda_0)\phi_j = (\lambda+\lambda_0)\phi_j$$

eli

$$\phi_j = (\lambda+\lambda_0)(L+\lambda_0)^{-1}\phi_j.$$

Nyt $(\lambda+\lambda_0)(L+\lambda_0)^{-1} : Y_\lambda \to Y_\lambda$ on identtinen operaattori, mutta kompakti, kun Y_λ varustetaan $H_0^1(\Omega)$:n topologialla. Tästä seuraa, että $\dim Y_\lambda < \infty$ (HT).

Oletetaan seuraavaksi, että $\sigma(L)$ ei ole diskreetti, t.s. on $\lambda_j \neq \mu$, $\lambda_j \neq \lambda_k$

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \mu,$$

$\lambda_j \in \sigma(L)$, eli on $\phi_j \in H_0^1(\Omega)$, Jolle

$$(L-\lambda_j)\varphi_j = 0,$$

$$\|\varphi_j\|_{H^1_0(\Omega)} = 1$$

Olkoon $r \in \mathbb{R}$, $r > \lambda_0$, $r \neq \mu$.
Tällöin $(L+r)^{-1}$ on rajoitettu $H^{-1} \to H^1_0$,
joten $K = (L+r)^{-1} : H^1_0(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$ on
kompakti. Lisäksi

$$(L + \lambda_j + r - \lambda_j)\varphi_j = (r-\lambda_j)\varphi_j,$$

eli

$$(L+r)\varphi_j = (r-\lambda_j)\varphi_j \in H^1_0(\Omega)$$

joten

$$\varphi_j = (r-\lambda_j) K \varphi_j$$

eli

$$K\varphi_j = \frac{1}{r-\lambda_j}\varphi_j.$$

Siis $\eta_j = \dfrac{1}{r-\lambda_j}$ ovat K:n ominaisarvoja,

$\eta_j \neq \eta_k$ kun $j \neq k$,

$$\lim_{j \to \infty} \eta_j = \frac{1}{r-\mu} \neq 0.$$

Tämä ei ole mahdollista koska $K : H_0^1 \to H_0^1$ on kompakti ↯↯. □