Osittaisdifferentiaaliyhtälöt 2 (ODY 2)

Matti Lassas

Johdanto

Esimerkki ODY:stä on Laplace-yhtälö

$$\Delta u = 0 \quad \Omega\text{:ssa}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin},$$

eli

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

Tämä yhtälö mallittaa sähkönjohtavuutta, diffuusiota ja lämmönjohtuvuutta.

Esim $u(x)$ = sähköinen potentiaali.

$$J(x) = -\underbrace{\sigma(x)}_{\text{johtavuus}} \cdot \nabla u(x) = \text{virta}$$

$$\nabla \cdot J = 0 \iff \Delta u = 0$$

Esim 2 $\Delta u = 0$ on lineaarinen approksimaatio (HT) minimipintayhtälölle

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \nabla u \right) = 0$$

Tarkastellaan lähdetermin sisältävää Poisson-yhtälöä

$$\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega$$

Klassisesti, $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$.

Kurssilla tarkastellaan vastaavanlaisten yhtälöiden yleistettyjä, eli heikkoja ratkaisuita.

Motivointi 1: Pistelähteet

Esim. $f(x)$ on pistelähdettä vastaava mitta,

$$f(A) = \begin{cases} 1, & \text{jos } 0 \in A \\ 0, & \text{jos } 0 \notin A \end{cases}, \quad A \subset \mathbb{R}^n \text{ Borel-joukko}$$

eli $f(x) = \delta_0(x)$.

Esim $f(x)$ vastaa "dipolia",

$$f(x) = \vec{A} \cdot \nabla \delta_0(x)$$

Motivointi 2: Olemassaolo

Esim: Tarkastellaan yhtälöä

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

Onko kaikille $f \in C(\bar{\Omega})$ olemassa ratkaisu $u \in C^2(\bar{\Omega})$?

Vastaus: Ei!

Olemassaolo on helpompi tarkastella heikoille ratkaisuille kuin klassisille, eli C^2 ratkaisuille.

Motivatiovasto 3 : Tekniikat funktionaalianalyysista

Olhoon:

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{ f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid f_\alpha = D^\alpha u \in C(\Omega) \text{ ovat laajennettavissa funktioiksi } \overline{f_\alpha} \in C(\overline{\Omega}),\ |\alpha| \le m \}$$

$$D^\alpha u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u(x),$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Avaruus $C^m(\overline{\Omega})$ on Banach-avaruus, joka on ei refleksiivinen

Tulemme tarkastelemaan Hilbert-avaruutta

$$H^m(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^2(\Omega) \},$$

"heikko derivaatta"

$$L^2(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ mitall.},\ \|f\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty \}.$$

Esimerkiksi: Δ on rajoitettu lineaarinen operaattori.

$$\Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

Tulemme kurssilla kohtaamaan (mielenkiinnosta riippuen)

A: Sobolev-avaruudet $H^m(\Omega)$ ja heikot ODY:den ratkaisut

B: ODY olemassaolotuloksia heikoille ratkaisuille

C: Sileyden paraneminen: Esim. jos $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $\Delta u = f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \dots \Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

D Operaattoriteoriaa ODY:lle ja sovelluksia aalto- ja lämpöyhtälölle

$$\partial_t v(x,t) = \Delta_x v(x,t)$$

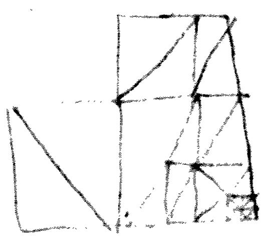
$$\downarrow$$

$$v(x,t) = e^{t\Delta_x} v(x,0)$$

E Numeeristen menetelmien perusteita

$$u, f \in PL(T) \subset H^1(\Omega)$$

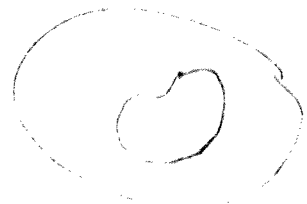
$$\Delta u \approx f$$



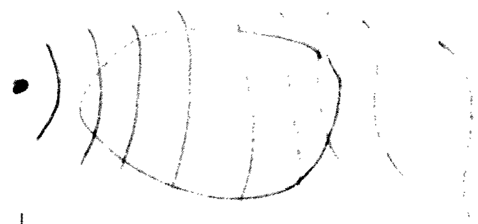
Kurssilla opiskeltavat menetelmät soveltuvat seuraaviin asioihin

- ODY epäsileille ja muuttuville kerroinfunktioille.

$$\nabla\cdot\left(\left(1+a\chi_{\Omega_1}(x)\right)\nabla u(x)\right)=0$$



- Inversio-ongelmat: pistelähdemittaukset ja kertoimien määrääminen



- Ratkaisujen numeerinen simulointi.
- L^p-teoria ODY:lle
- Epälineaariset yhtälöt

$$\Delta u + f(u) = 0$$

- Systeemit (Maxwell, Dirac)
- FEM, FD-menetelmät
- Mikrolokaali analyysi ODY:lle

I Funktioavaruuksia

1.1 Hölder-avaruudet

Funktio $u : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, rajoitettu on Lipschitz, jos

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x-y|, \quad x, y \in \Omega.$$

Funktio $u : \Omega \to \mathbb{R}$ on Hölder-jatkuva eksponentilla γ, $0 < \gamma \leq 1$ jos

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{\gamma}.$$

Määr. 1.1 1) Jos $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja rajoitettu, merkitsemme

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

2) Funktio $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ on $C^k(\overline{\Omega})$:ssa, jos $D^{\alpha}(u|_{\Omega})$ on kaikille $|\alpha| \leq k$ laajennettavissa funktioksi $f^{\alpha} \in C(\overline{\Omega})$ ja

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_{C(\overline{\Omega})}$$

3) Funktio $u \in C^k(\bar{\Omega})$ on avaruudessa $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ jos

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}} = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}} < \infty,$$

$$[u]_{C^{0,\gamma}} = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

Lause 1.2 Avaruudet $C^k(\bar{\Omega})$ ja $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ ovat Banach-avaruuksia

Tod. Sivuutetaan

Seuraavaksi käsittelemme "L^2-derivaattoja". Tätä varten "kertaamme" Hilbert-avaruuden

$$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} \mid u \text{ mitallinen}, \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty\}$$

approksimaatio-ominaisuudet.

Merkitään $B(y,R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < R\}$

$$\phi \in C_0^\infty(B(0,1)), \quad \phi(x) \geq 0$$

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = 1$$

$$v \in L^2(\Omega), \quad v^0(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

<u>Lemma</u> Olkoon $v \in L^2(\Omega)$, $K \subset \Omega$ kompakti (el. $K \subset\subset \Omega$), ja $v_\varepsilon(x) = \int_\Omega \phi_\varepsilon(x-y) v(y)\,dy$

Tällöin

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| v_\varepsilon - v \|_{L^2(K)} = 0$$

tod Olkoon $0 < \rho < \mathrm{dist}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, K)$.

Koska

$$v_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y) v^0(y)\,dy$$

$$\mathrm{supp}(\phi_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$$

Pätee kaikille $0 < \varepsilon < \rho$, $v_\varepsilon(x) = v_\varepsilon^0(x)$, $x \in K$, missä

$$v_\varepsilon^0(x) = (\phi_\varepsilon * v^0)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Fourier-muunnosta käyttämällä saamme

$$\| v^0 - v_\varepsilon^0 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| \mathcal{F}(v^0 - v_0^\varepsilon) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \| \widehat{v^0} - \hat{\phi}_\varepsilon \cdot \hat{v}_0 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

(1) $$= \int_{\mathbb{R}^n} | 1 - \hat{\phi}_\varepsilon(\xi) |^2 \underbrace{|\widehat{v^0}(\xi)|^2}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)} \, d\xi$$

Nyt $\widehat{\phi_\varepsilon}(\xi) = \hat{\phi}(\varepsilon \xi)$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$,

joten $\hat{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja

(2) $$|\hat{\phi}(\xi)| \leq \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$$

$$\hat{\phi}(0) = 1,$$

(3) $$\lim_{\varepsilon \to 0} | \hat{\phi}(\varepsilon \xi) - 1 | = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Lebesguen dominoidun konvergenssilause antaa (1), (2), (3):n nojalla

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \| v^0 - v_\varepsilon^0 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \| v - v_\varepsilon \|^2_{L^2(K)}. \quad \square$$

1.2 Heikot derivaatat

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja

$$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} \mid D^\alpha u \text{ on olemassa } \forall \alpha\},$$

$$\mathrm{Supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}},$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \mathrm{supp}(u) \subset \Omega \text{ on kompakti.}\}$$

Muistutamme, että jos $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, pätee

$$\int_\Omega \partial_{x_j} u(x) \cdot \phi(x)\, dx = -\int_\Omega u(x)\, \partial_{x_j} \phi(x)\, dx$$

<u>Määr. 1.3</u> Olkoon $u, w \in L^1(\Omega)$. Sanomme, että w on u:n heikko ∂_{x_j}-derivaatta, ja merkitsemme $w = D_j u$, jos kaikilla $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega w(x)\, \phi(x)\, dx = -\int_\Omega u(x)\, \partial_{x_j} \phi(x)\, dx.$$

Lisäksi, $\tilde{w}$ on heikko ∂_x^α-derivaatta u:sta, $D^\alpha u = \tilde{w}$ jos

$$\int_\Omega \tilde{w}(x)\, \phi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x)\, \partial_x^\alpha \phi(x)\, dx.$$

<u>Lemma 1.4</u>* Jos $D_j u = w_1$, $D_j u = w_2$, niin $w_1 = w_2$.

<u>tod</u> Olkoon $w = w_1 - w_2 \in L^1(\Omega)$. Kaikille $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega w\phi\, dx = \int_\Omega (w_1 - w_2)\phi\, dx = -\int_\Omega (u-u)\,\partial_{x_j}\phi\, dx = 0$$

Kun $\phi(x) = \psi_\varepsilon(z-x) = \psi\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varepsilon > 0$

on

$$w^\varepsilon(z) := \int_\Omega \psi_\varepsilon(z-x)\, w(x)\, dx = \int_\Omega \phi w\, dx = 0$$

Funktio w^ε on w:n mollifikaatio, ja kaikille kompakteille $K \subset \Omega$ pätee ④

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| w - w^\varepsilon \|_{L^1(K)} = 0$$

Siis $w|_K = 0$, joten $w = 0$ Ω:ssa. □

Määr 1.5 Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Funktio $u \in L^p(\Omega)$ on Sobolev-avaruudessa

$$W^{k,p}(\Omega)$$

jos kaikille $|\alpha| \leq k$ on heikolle derivaatalle pätee $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, ja

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

Kun $p = 2$, merkitsemme

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega),$$

jolloin

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Lisäksi, $H^k_0(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ on joukon $C^\infty_0(\Omega)$ sulkeuma $H^k(\Omega)$:ssa.

Sisätulo (1):ssa on sisätulon

$$\langle u, w \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u \cdot \overline{D^\alpha w} \, dx$$

määräämä

Lause 1.6 (Perusominaisuuksia)

1) $D^\alpha : H^k(\Omega) \to H^{k-|\alpha|}(\Omega)$, $k \geq |\alpha|$, on jatkuva

2) $D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$, $u \in H^{|\alpha|+|\beta|}(\Omega)$,

$\alpha+\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n) = (\alpha_1+\beta_1, \dots \alpha_n+\beta_n)$

Tod. Ht.

Lause 1.7 Avaruus $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ on Hilbert-avaruus.

Tod. Olkoon u_j, $j = 1, 2, \dots$ Cauchy-jono $H^k(\Omega)$:ssa. Tällöin kaikille $|\alpha| \leq k$

$$\| D^\alpha u_j - D^\alpha u_\ell \|_{L^2(\Omega)} \leq \| u_j - u_\ell \|_{H^k} \xrightarrow[j,\ell\to\infty]{} 0$$

Joten $D^\alpha u_j$ on Cauchy-jono $L^2(\Omega)$:ssa. Koska $L^2(\Omega)$ on täydellinen, on $f^\alpha \in L^2(\Omega)$ s.e. $D^\alpha u_j \to f^\alpha$ $L^2(\Omega)$:ssa, kun $j \to \infty$. Erikoisesti, $u_j \to f^0 =: u$ $L^2(\Omega)$:ssa kun $j \to \infty$.

Seuraavaksi näytämme, että $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ kaikilla $|\alpha| \le k$, eli $u \in H^k(\Omega)$.

Nyt funktiolle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ pätee $D^\alpha u \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega u \, D^\alpha \phi \, dx = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j \, D^\alpha \phi \, dx$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} D^\alpha u_j \cdot \phi \, dx$$

$$= \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} f^\alpha \cdot \phi \, dx$$

Joten u:lla on heikot derivaatat

$$D^\alpha u = f^\alpha \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \le k.$$

Siis $u \in H^k(\Omega)$. Koska

$$\|u_j - u\|_{H^k}^2 = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u_j - f^\alpha\|_{L^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{j\to\infty} 0,$$

pätee

$$\lim_{j\to\infty} u_j = u \quad H^k(\Omega)\text{:ssa.} \quad \square$$

Appendix A: Fourier-muunnos

Motivointi: Fourier sarjojen teorian nojalle

$$f: [-L, L] \to \mathbb{C} \qquad f \in L^2([-L,L])$$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{\pi}{N} n \cdot x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n(x)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(y) e^{-i\frac{\pi}{L} n \cdot y} \, dy = \frac{1}{\|e_n\|_{L^2}^2} \langle f, e_n \rangle_{L^2}$$

Merkitsemällä $c_n = \hat{f}(\frac{\pi}{L} n)$, $z_n = h n$, $h = \frac{\pi}{L}$, saamme

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(z_n) e^{i z_n x} \cdot h$$

$$\hat{f}(z_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(y) e^{-i z_n y} \, dy$$

Määr. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Funktion Fourier-muunnos on

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F} f)(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) \, dx$$

Olkoon $\langle x \rangle = \sqrt{1+|x|^2}$, ja

$$S(\mathbb{R}^n) = \Big\{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \;\Big|\; f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \text{kaikille } \alpha, m$$
$$\text{on } C_{m,\alpha} > 0 \text{ s.e. } |\langle x \rangle^m D^\alpha f(x)| \leq C_{m,\alpha},\ x \in \mathbb{R}^n \Big\}$$

Lause: Jos $f \in S(\mathbb{R}^n)$, niin $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$.
Lisäksi, $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$.

Tod. Oheismateriaali + HT.

Lause Olkoon $f, h \in S(\mathbb{R}^n)$. Tällöin

a) Jos $g(x) = f(x-a)$, niin $\hat{g}(\xi) = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)$

b) Jos $g(x) = \partial_{x_j} f(x)$, niin $\hat{g}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$

c) Jos $g(x) = x_j f(x)$, niin $\hat{g}(\xi) = -i\partial_{\xi_j}\hat{f}(\xi)$

d) Jos $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$, niin $\hat{g}(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi)$, $\lambda > 0$

e) Jos $g = (f * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)h(z)\,dz$, niin $\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{h}(\xi)$

Tod HT

Lause (Plancherel). Jos $f \in S(\mathbb{R}^n)$, niin

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Tod. Taustamateriaali + HT

<u>Korollaari</u> $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ voidaan laajentaa yhsikäsitteiselle tavalle jatkuvaksi lineaarikuvaukseksi

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

Lisäksi, $\mathcal{F}^2 f(x) = Jf(x) := f(-x)$, eli

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = (\mathcal{F} f)(-x)$$

<u>Esim.</u> Gaussisen funktion Fourier-muunnos on gaussinen funktio;

$$g(x) = e^{-|x|^2/2}$$

$$\hat{g}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2} = g(\xi)$$