

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II  
Laskuharjoitus 7

1. Osoita, että identtinen kuvaus Hilbert-avaruudessa  $H$ ,

$$I : H \rightarrow H \\ x \mapsto x$$

on kompakti, jos ja vain jos  $\dim H < \infty$ .

2. Osoita, että jos  $x_n \xrightarrow{w} x$  Hilbert-avaruudessa  $H$ , niin  $\|x\|_H \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_H$ .
3. Osoita, että Hilbert-avaruudessa  $H$  aliavaruudelle  $Y \subset H$  pätee  $(Y^\perp)^\perp = \overline{Y}$ .
4. Olkoon  $H$  Hilbert-avaruus ja  $A : H \rightarrow H$ ,  $B : H \rightarrow H$  rajoitettuja lineaarioperaattoreita.
  - a) Jos  $A$  ja  $A + B$  ovat kääntyviä, niin osoita Kreinin kaava

$$(A + B)^{-1} = A^{-1}(I + BA^{-1})^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1}A^{-1}.$$

- b) Jos  $A$  on kääntyvä ja  $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ , niin osoita että  $A + B$  on kääntyvä.