

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II  
Laskuharjoitus

1. Merkitään  $\Omega := B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ , missä  $n$  on suuri. Etsi esimerkki funktioista  $u \in H_0^1(\Omega)$  ja  $F \in L^2(\Omega)$  s.e.  $u$  on yhtälön

$$\begin{aligned}\Delta u &= F, & \Omega\text{:ssa,} \\ u|_{\partial\Omega} &= 0\end{aligned}$$

heikko ratkaisu ja  $u \notin C^2(\Omega)$ .

2. Osoita, että jos  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\Omega := (0, 1) \subset \mathbb{R}$  ja  $\text{Tr}_{\partial\Omega} u = 0$ , niin  $u \in H_0^1(\Omega)$ .
3. Käy läpi lauseen [Renardy, Rogers. An Introduction to Partial Differential Equations, Theorem 7.36, 2nd ed. (Theorem 6.105, 1st ed.)] todistus tapauksessa  $s = 1$ ,  $m = 2$ .
4. Käy läpi seuraavan väitteen todistuksen yksityiskohdat: Kun  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  on rajoitettu avoin joukko jonka reuna on  $C^\infty$ -sileä ja  $s > 1/2$  niin rajoittumakuvaus  $T : u \mapsto u|_{\partial\Omega}$  on jatkuva kuvaus  $T : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial\Omega)$

Kopio todistuksesta löytyy kurssikansiosta.