Vektorianalyysi, harj. 4, syksy 2011

1. Olk. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \sin(x_1)\cos(x_1 x_2)$

$$\Rightarrow \partial_2 f(x_1, x_2) = \partial_2 \sin(x_1)\cos(x_1 x_2) = \sin(x_1)\partial_2 \cos(x_1 x_2)$$

$$= \sin(x_1)(-\sin(x_1 x_2))\partial_2(x_1 x_2) = \underline{-\sin(x_1)\sin(x_1 x_2)x_1} \quad (\mathrm{I})$$

$$\Rightarrow \partial_2\partial_2 f(x_1, x_2) = -\sin(x_1)x_1\partial_2 \sin(x_1 x_2)$$

$$= -x_1 \sin(x_1)\cos(x_1 x_2)\underbrace{\partial_2(x_1 x_2)}_{=x_1} = -x_1^2 \sin(x_1)\cos(x_1 x_2)$$

$$= \underline{-x_1^2 f(x_1, x_2)} \quad (\mathrm{II})$$

$$\partial_1\partial_2 f(x_1, x_2) \overset{(\mathrm{I})}{=} \partial_1\{-x_1 \sin(x_1)\sin(x_1 x_2)\}$$

$$= (\partial_1(-x_1))\sin(x_1)\sin(x_1 x_2) - x_1(\partial_1 \sin x_1)\sin(x_1 x_2)$$

$$- x_1 \sin(x_1)\partial_1 \sin(x_1 x_2)$$

$$= -1 \cdot \sin(x_1)\sin(x_1 x_2) - x_1 \cos(x_1)\sin(x_1 x_2)$$

$$- x_1 \sin(x_1)\cos(x_1 x_2)\underbrace{\partial_1(x_1 x_2)}_{=x_2}$$

$$= -\sin(x_1)\sin(x_1 x_2) - x_1\cos(x_1)\sin(x_1 x_2)$$

$$- x_1 x_2 \sin(x_1)\cos(x_1 x_2)$$

$$\partial_2\partial_2\partial_2 f(x_1, x_2) \overset{(\mathrm{II})}{=} \partial_2\{-x_1^2 f(x_1, x_2)\}$$

$$= -x_1^2 \partial_2 f(x_1, x_2) \overset{(\mathrm{I})}{=} -x_1^2\{-\sin(x_1)\sin(x_1 x_2)x_1\}$$

$$= \underline{x_1^3 \sin(x_1)\sin(x_1 x_2)}$$

2. $\partial_{-v} f(x) = -\partial_v f(x)$

Tod.

$$\partial_{-v} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t(-v)) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x - tv) - f(x)}{-(-t)} = -\lim_{t \to 0} \frac{f(x - tv) - f(x)}{-t}$$

$$\left(= -\lim_{-t \to 0} \frac{f(x - tv) - f(x)}{-t} = -\lim_{s \to 0} \frac{f(x + sv) - f(x)}{s} \right)$$

kun merk. $s = -t$

$$= -\partial_v f(x) \quad \square$$

Huom. Jos tiedettäisiin, että f on derivoituva x:ssä, saataisiin vielä helpommin lauseen L 2.7.1. (Martio) avulla

$$\partial_{-v} f(x) = \nabla f(x) \cdot (-v) = -\nabla f(x) \cdot v = -\partial_v f(x).$$

3. Maaston korkeus (x,y):ssä on

$$h(x,y) = \frac{10}{3+x^2+2y^2}$$

$$\Rightarrow \partial_1 h(x,y) = -\frac{10}{(3+x^2+2y^2)^2}\underbrace{\partial_1(3+x^2+2y^2)}_{=2x}$$

$$= \frac{-20x}{(3+x^2+2y^2)^2}$$

&

$$\partial_2 h(x,y) = -\frac{10}{(3+x^2+2y^2)^2}\underbrace{\partial_2(3+x^2+2y^2)}_{=4y}$$

$$= \frac{-40y}{(3+x^2+2y^2)^2},$$

$$\Rightarrow \partial_1 h(3,2) = \frac{-20\cdot 3}{(3+3^2+2\cdot 2^2)^2} = \frac{-60}{20^2} = -\frac{3}{20}$$

$$\& \quad \partial_2 h(3,2) = \frac{-40\cdot 2}{20^2} = -\frac{1}{5}$$

∇h osoittaa suuntaan, johon h (siis maaston korkeus) kasvaa voimakkaimmin. (Martio, s. 52).* Siis h vähenee voimakkaimmin (eli alamäki on jyrkin) & vesi virtaa suuntaan $-\nabla h$.

$\Rightarrow$ Puron suunta pisteessä $(3,2)$

$$= -\nabla h(3,2) = -(\partial_1 h(3,2), \partial_2 h(3,2))$$

$$= -\left(-\frac{3}{20}, -\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{3}{20}, \frac{1}{5}\right)$$

* Tämä perustuu lauseisiin 2.7.1 & 2.7.5 joten h:n täytyy olla derivoituva. Mutta selvästi $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$, joten L 2.5.2. mukaan h on derivoituva.

Huom. Merk. $v = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{20}, \frac{1}{5}\right)$ &

$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $u(x,y) = (x, y, h(x,y))$

Tällöin $|v| = 1$ & maastopinta on

h:n graafi $G_h = \{u(x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

eli u:n kuvajoukko. $\mathbb{R}^3$:n polku $\gamma = u \circ \alpha :$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, missä $\alpha(t) = [3, 2]^T + t\,v$,

kulkee pitkin graafia pisteen

$(3, 2, h(3,2))$ kautta, kun $t = 0$ & on

tässä pisteessä puron suuntainen

Tämä <u>puron suunta $\mathbb{R}^3$:ssa</u> on

$$\gamma'(0) = u'(3,2)\underbrace{\alpha'(0)}_{=v}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 h(3,2) & \partial_2 h(3,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{80} \\ \frac{1}{20} \end{bmatrix} = \frac{1}{320}\begin{bmatrix} 12 & 16 & -5 \end{bmatrix}^T$$

$$= \left[v_1, v_2, \partial_v h(3,2)\right]^T$$

mikä on sama kuin $\partial_v u(3,2)$ (vektori!)

4. Olk. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1 x_2^2$

Tällöin f on harmoninen koko tasossa.

Tod. Polynomifunktiona $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

$$\partial_1 \partial_1 f(x_1, x_2) = \partial_1 (3x_1^2 - 3x_2^2) = 6x_1 - 0 = 6x_1$$

&

$$\partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2) = \partial_2 (0 - 6x_1 x_2) = -6x_1$$

$$\Rightarrow \partial_1 \partial_1 f + \partial_2 \partial_2 f = 6x_1 - 6x_1 = 0 \quad \square$$

Esimerkki C^2-funktiosta, joka ei ole harmoninen $\mathbb{R}^2$:ssa:

Val. esim. $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Rightarrow \partial_1 \partial_1 g + \partial_2 \partial_2 g = \partial_1 \partial_1 (x_1^2 + x_2^2) + \partial_2 \partial_2 (x_1^2 + x_2^2)$$

$$= \partial_1 2x_1 + \partial_2 2x_2 = 2 + 2 = 4 \neq 0$$

(jopa $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$).

5. Määr. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2^2, & x_1 \in \mathbb{Q} \\ 0, & x_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

$x_1 \in \mathbb{Q}$: $\dfrac{f(x_1, x_2+k) - f(x_1, x_2)}{k} = \dfrac{(x_2+k)^2 - x_2^2}{k}$

$$= \frac{2x_2 k + k^2}{k} \xrightarrow[k \to 0]{} 2x_2$$

$x_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$: $\dfrac{f(x_1, x_2+k) - f(x_1, x_2)}{k} = \dfrac{0-0}{k} = 0 \xrightarrow[k \to 0]{} 0$

$$\Rightarrow \partial_2 f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2x_2, & x_1 \in \mathbb{Q} \\ 0, & x_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

& samoin:

$x_1 \in \mathbb{Q}$: $\dfrac{\partial_2 f(x_1, x_2+k) - \partial_2 f(x_1, x_2)}{k} = \dfrac{2(x_2+k) - 2x_2}{k}$

$$= 2 \xrightarrow[k \to 0]{} 2$$

&

$x_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$: $\dfrac{\partial_2 f(x_1, x_2+k) - \partial_2 f(x_1, x_2)}{k} = \dfrac{0-0}{k}$

$$\xrightarrow[k \to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow \partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2, & x_1 \in \mathbb{Q} \\ 0, & x_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Siis $\partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2)$ $\exists$ $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

mutta on myös epäjatkuva $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
(vrt. harj. 2)

6. Oletetaan tehtävän mukaan tunnetuksi: yhtälön

$$x + 2y + z + e^{2z} = 1 \quad (I)$$

ratkaisu voidaan esittää muodossa $z = f(x,y)$ sopivalla f, kun (x,y) on jossakin origon ympäristössä. Oletetaan lisäksi, että f on C^2-funktio.

Merk. $z_0 := f(0,0)$. $(I) \Rightarrow z_0 + e^{2z_0} = 1$

Tämän eräs ratk. on selvästi $z_0 = 0$.

Määr. $g(z) = z + e^{2z}$

$$\Rightarrow g'(z) = 1 + 2e^{2z} > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

$\Rightarrow g$ on aidosti kasvava, joten $z_0 = 0$ on ainoa ratk.

$$\Rightarrow \underline{f(0,0) = 0.}$$

Derivoidaan (I) ketjusääntöä käyttäen puolittain

$$\Rightarrow 1 + \partial_1 f(x,y) + 2e^{2f(x,y)}\partial_1 f(x,y) = \partial_1 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 3\partial_1 f(0,0) = 0 \Rightarrow \underline{\partial_1 f(0,0) = -\tfrac{1}{3}}$$

&

$$2 + \partial_2 f(x,y) + 2e^{2f(x,y)}\partial_2 f(x,y) = 0 \quad (II)$$

$$\Rightarrow 2 + 3\partial_2 f(0,0) = 0 \Rightarrow \underline{\partial_2 f(0,0) = -\tfrac{2}{3}}$$

$$(II) \Rightarrow \partial_1\partial_2 f(x,y) + 4e^{2f(x,y)}\partial_1 f(x,y)\,\partial_2 f(x,y) + 2e^{2f(x,y)}\partial_1\partial_2 f(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow 3\partial_1\partial_2 f(0,0) + 4\cdot e^0\left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(-\tfrac{2}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\partial_1\partial_2 f(0,0) = -\frac{8}{27}}$$