MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Kotitehtävät 11
28.11.2011 alkavalle viikolle
Esimerkkiratkaisuja, Jani Hannula ja Miika Paavola

Huom! DVAL = Differentiaalilaskennan väliarvolause (= VL = väliarvolause).

K1. Oletetaan, että funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $f(0) = 3$ ja että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $-1 < f'(x) < 2$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(1)$?

Ratkaisu. Funktio f toteuttaa DVAL:en oletukset välillä $[0,1]$, joten DVAL:en perusteella jollain $\xi \in]0,1[$ pätee:

$$f(1) - f(0) = f'(\xi)(1-0) = f'(\xi) \iff f(1) = f'(\xi) + f(0) = f'(\xi) + 3.$$

Tehtävän oletuksen mukaan: $-1 < f'(\xi) < 2$, joten $3 - 1 < f(1) < 3 + 2 \iff 2 < f(1) < 5$.

K2. Oletetaan, että funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $f(1) = 3$ ja että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $-1 < f'(x) < 2$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(0)$?

Ratkaisu. Funktio f toteuttaa DVAL:en oletukset välillä $[0,1]$, joten DVAL:en perusteella jollain $\xi \in]0,1[$ pätee:

$$f(1) - f(0) = f'(\xi)(1-0) = f'(\xi) \iff f(0) = -f'(\xi) + f(1) = -f'(\xi) + 3\ .$$

Tehtävän oletuksen mukaan: $-1 < f'(\xi) < 2 \iff -2 < -f'(\xi) < 1$, joten $3 - 2 < f(0) < 3 + 1 \iff 1 < f(0) < 4$.

K3. Oletetaan, että funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $f(0) = 3$ ja että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $f'(x) < x$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(1)$? Vihje: apufunktiosta $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - f(x)$ on iloa: kannattaa osoittaa, että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $g'(x) > 0$.

Ratkaisu. Määritellään vihjeen mukainen apufunktio $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = (1/2)x^2 - f(x)$. Funtion g derivaatta on positiivinen kaikilla $x \in]0,1[$ eli

$g'(x) = x - f'(x) > 0$, kun $0 < x < 1$, sillä oletuksen mukaan $x > f(x)$, kun $0 < x < 1$. Funktio g on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$, joten väliarvolauseen perustella eräällä $\xi \in]0,1[$ pätee:

$$g'(\xi) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \frac{1}{2} - f(1) - (0 - f(0)) = \frac{1}{2} - f(1) + f(0).$$

Koska $g'(x) > 0$, kun $0 < x < 1$ saadaan:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} - f(1) + f(0) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & f(1) < f(0) + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & f(1) < 3 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & f(1) < \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

K4. Oletetaan, että $h > 0$ ja että funktio $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä
$]x_0 - h, x_0 + h[$ ja derivoituva väleillä $]x_0 - h, x_0[$ ja $]x_0, x_0 + h[$. Oletetaan, lisäksi, että $\lim_{x \to x_0 -} f'(x) = \lim_{x \to x_0 +} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Osoita, että f on derivoituva kohdassa x_0 ja että $f'(x_0) = A$. Vihje: sovella väliarvolausetta erotusosamäärään.

Ratkaisu. Näytetään ensin, että erotusosamäärällä on vasemmanpuolinen raja-arvo A pisteessä x_0. Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletuksen mukaan on olemassa sellainen δ_1, että $|f'(x) - A| < \varepsilon$, kun $x \in]x_0 - \delta_1, x_0[$. Olkoon $x \in]x_0 - h, x_0[$. Nyt välillä $[x, x_0]$ voidaan soveltaa väliarvolausetta, sillä funktio f on oletuksen mukaan kyseisellä välillä jatkuva ja vastaavalla avoimella välillä derivoituva. Siispä eräällä $\xi \in]x, x_0[$ pätee:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$

Näin ollen

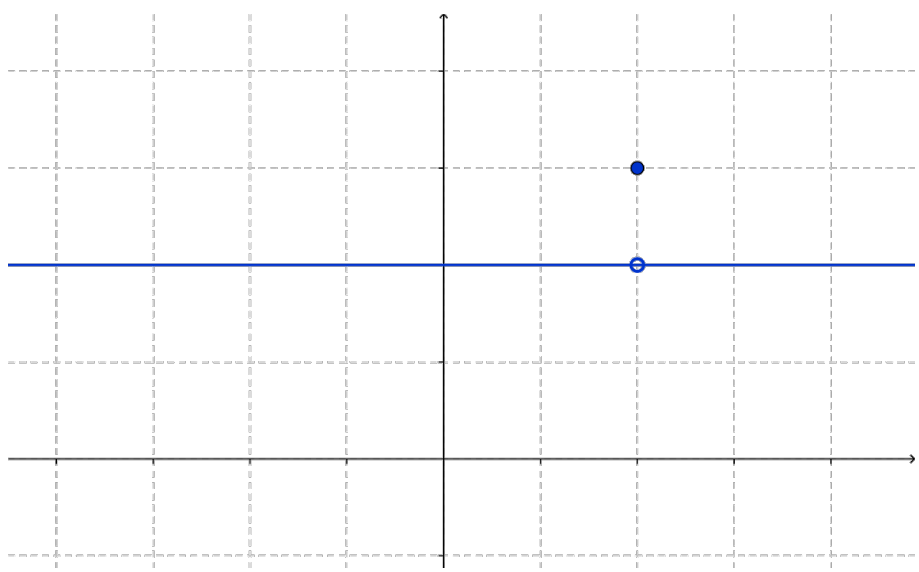
$$\begin{aligned} & f'(\xi) - A = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} - A \\ \Rightarrow \quad & |f'(\xi) - A| = \left| \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} - A \right|. \end{aligned}$$

Koska oletuksen mukaan $|f'(x) - A| < \varepsilon$, kun $x \in\ ]x_0 - \delta_1, x_0[$, niin nyt äskeisen perusteella

$$\left|\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} - A\right| = \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A\right| < \varepsilon,$$

kun $x \in\ ]x_0 - \delta_1, x_0[$. Näin ollen erotusosamäärällä on vasemmanpuolinen raja-arvo A pisteessä x_0. Oikeanpuoleinen raja-arvo näytetään samalla tavalla.

Huom. Tässä tehtävässä oli oleellista, että funktio f oli jatkuva pisteessä x_0! Tällöin väliarvolauseen oletukset ovat voimassa. Jos funktion jatkuvuutta pisteessä x_0 ei olisi oletettu, ei derivaattafunktion raja-arvon olemassaolosta pisteessa x_0 seuraa derivoituvuus pisteessä x_0. Vastaesimerkiksi kävisi seuraavanlainen tilanne:



K5. Oletetaan, että $a_1, \ldots, a_n$ ovat reaalilukuja. Millä x ns. neliösumma $(x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$ saa pienimmän mahdollisen arvonsa?

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = (x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$. Tällöin $f'(x) = 2(x - a_1) + \ldots + 2(x - a_n)$. Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} & 2(x - a_1) + \ldots + 2(x - a_n) = 0 \\ \iff\ & 2x - 2a_1 + \ldots + 2x - a_n = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff 2nx = 2a_1 + \ldots + 2a_n \\
&\iff x = \frac{2a_1 + \ldots + 2a_n}{2n} \\
&\iff x = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.
\end{aligned}$$

Huomataan: $f'(x) < 0$, kun $x < (a_1 + \ldots + a_n)/n$ ja $f'(x) > 0$, kun $x > (a_1 + \ldots + a_n)/n$, joten f on laskeva pisteeseen $x = (a_1 + \ldots + a_n)/n$ ja kasvava sen jälkeen, joten $x = (a_1 + \ldots + a_n)/n$ (=pisteiden $a_1, \ldots, a_n$ keskiarvo) on funktion f pienin arvo.

Huom. Käytännössä tässä sovelletaan monisteessa nimellä "f' -testi ääriarvoille" -nimellä kulkevaa lausetta.

K6. Oletetaan, että funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan, että $f(0) = 3$ ja että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $f'(x) > x^2$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(1)$? Vihje: apufunktiosta $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$ on iloa: kannattaa osoittaa, että kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $g'(x) > 0$.

Ratkaisu. Tarkastellaan annettua apufunktiota $g(x) = f(x) - (1/3)x^3$: $g'(x) = f'(x) - x^2 > x^2 - x^2 = 0 \; \forall x \in]0,1[$, sillä $f'(x) > x^2 \; \forall x \in]0,1[$. Lisäksi $g(1) = f(1) - 1/3$ ja $g(0) = f(0) - 0 = 3$
g toteuttaa DVAL:n oletukset välillä $[0,1]$, joten DVAL: jollain $\xi \in]0,1[$ pätee:

$$\begin{gathered}
g(1) - g(0) = g'(\xi)(1-0) = g'(\xi) > 0 \iff g(1) - g(0) > 0 \iff \\
f(1) - 1/3 - f(0) > 0 \iff f(1) > 1/3 + f(0) = 1/3 + 3 = 10/3.
\end{gathered}$$

K7. Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla x pätee $|\cos x - 1| \leq |x|$. (Kannattaa muistaa, että $\cos 0 = 1$.)

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = \cos x - 1$. Tiedetään, että $\cos 0 = 1$, joten $f(0) = 0$. Lisäksi tiedetään, että $f'(x) = -\sin x$, joten $-1 \leq f'(x) \leq 1$. Funktio f on derivoituva ja siten jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten väliarvolausetta voidaan soveltaa kaikilla väleillä $[a,b]$. Jaetaan tarkastelu kolmeen osaan: $x = 0$, $x < 0$ ja $x > 0$.

Jos $x = 0$, väite pätee, sillä $|\cos 0 - 1| = |1 - 1| = |0|$.

Jos $x < 0$ väliarvolauseen perusteella eräällä $\xi_1 \in]x, 0[$ pätee:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{f(x)}{x}.$$

Koska $-1 \leq f'(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ tiedetään, että $-1 \leq f(x)/x \leq 1$, joten

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|f(x)|}{|x|} \leq 1 \Leftrightarrow |f(x)| \leq |x|.$$

Jos $x > 0$ väliarvolauseen perusteella eräällä $\xi_2 \in \,]0, x[$ pätee:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Nyt väite seuraa samoin kuin tapauksessa $x < 0$. Siis väite pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Huom. tehtävän olisi voinut ratkaista ihan samaan tapaan myös merkitsemällä $f(x) = \cos x$.

K8. (a) Oletetetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$ ja että C > 0. Oletetaan, että kaikilla $x \in]a, b[$ pätee $|f'(x)| \leq C$. Osoita, että kaikilla $x, t \in [a, b]$ pätee $|f(x) - f(t)| \leq C|x - t|$.

(b) Oletetetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ että C > 0. Oletetaan, että kaikilla $x, t \in [a, b]$ pätee $|f(x) - f(t)| \leq C|x - t|$. Onko f välttämättä derivoituva välillä $]a, b[$?

(c) Oletetetaan, että C > 0. Oletetaan, että kaikilla $x, t \in [a, b]$ pätee

$$|f(x) - f(t)| \leq C|x - t| \sqrt[42]{|x - t|} \; (= C|x - t|^{\frac{43}{42}}).$$

Osoita, että f on vakiofunktio. Kannattaa tutkia erotusosamäärää. (Mikähän on oleellista eksponentissa $\frac{43}{42}$? Murtopotenssit tullaan pian määrittelemään potenssien ja juurien yhdistettyinä funktioina. Tässä pieni ”varaslähtö”.)

Ratkaisu. (a) Jos $x = t$, väite pätee, sillä $|f(t) - f(t)| \leq C|t - t| \Leftrightarrow 0 \leq 0$. Voidaan siis olettaa, että $x < t$ [1]. Nyt funtio on derivoituva ja jatkuva välillä $[x, t]$. Näin ollen eräällä $\xi \in \,]x, t[$ pätee:

$$f'(\xi) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} & f(t) - f(x) = f'(\xi)(t - x) \\ \Rightarrow \quad & |f(t) - f(x)| = |f'(\xi)(t - x)| \\ \Rightarrow \quad & |f(t) - f(x)| = |f'(\xi)||t - x| \leq C|t - x|, \end{aligned}$$

[1] Lopussa huomataan, ettei lukujen x ja t keskinäisellä järjestyksellä ole merkitystä ratkaisun kannalta.

joten väite pätee [2].

(b) Jos oletetaan, että kaikilla $x, t \in [a, b]$ pätee $|f(x) - f(t)| \leq C|x - t|$, ei funktio f ole välttämättä derivoituva kaikissa pisteissä $x \in]a, b[$. Esitetään pari vastaesimerkkiä.

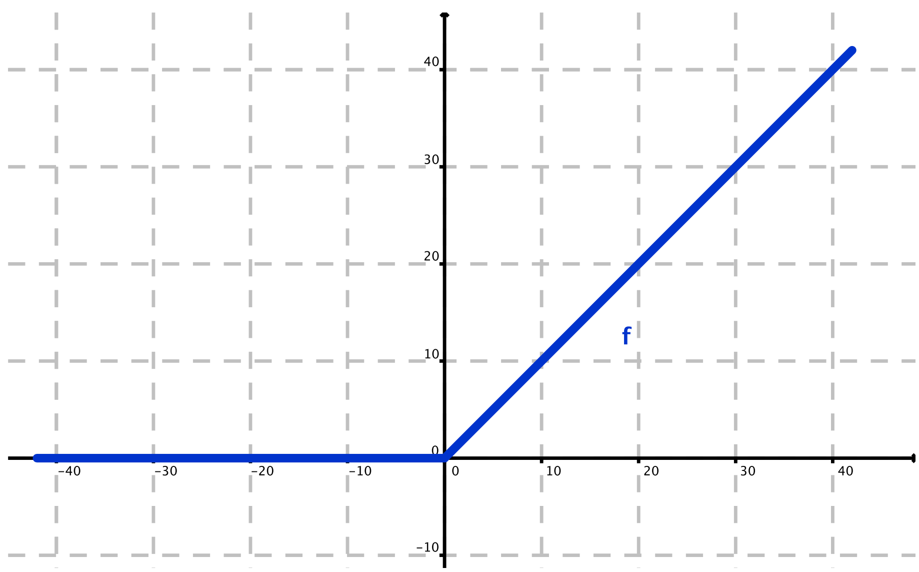
(i) Olkoon $f(x) = |x|$ ja tutkittava väli $[a, b] = [-2, 2]$. Olkoon $x, t \in [-2, 2]$. Nyt

$$|f(x) - f(t)| = ||x| - |t|| \overset{*}{\leq} |x - t| = 1 \cdot |x - t|.$$

Kohdassa (*) käytettiin kolmioepäyhtälöä tai oikeammin sen seurausta: jos $x, y \in \mathbb{R}$, niin $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$. Nyt siis kaikilla $x, t \in [a, b]$ pätee $|f(x) - f(t)| \leq C|x - t|$, mutta funktio f ei ole derivoituva nollassa.

(ii) Olkoon tutkittava väli $[a, b] = [-42, 42]$ ja funktio f määritelty ehdolla

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } -42 \leq x < 0 \\ x, \text{ kun } 0 \leq x \leq 42. \end{cases}$$



Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 0, sillä erotusosamäärän vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot ovat erisuuret (samaan tapaan kuin funktiolla $x \mapsto |x|$). Näytetään, että kuitenkin $|f(x) - f(t)| \leq |x - t|$ kaikilla $x, t \in [a, b]$:

[2] Muistetaan kurssin alussa todistettu tulos, että $|x| = |-x|$. Lukujen x ja t keskinäisellä järjestyksellä ei siis ollut merkitystä.

- Jos $x < 0$ ja $t < 0$ väite pätee, sillä tällöin $|f(x) - f(t)| = |0 - 0| = 0 \leq |x - t|$.
- Jos $x \geq 0$ ja $t \geq 0$ väite pätee, sillä tällöin $|f(x) - f(t)| = |x - t|$.
- Jos $x \geq 0$ ja $t < 0$ väite pätee, sillä tällöin ensinnäkin $-t > 0$ ja näin ollen $|f(x) - f(t)| = |x - 0| = |x| \leq |x - t|$.
- Jos $t \geq 0$ ja $x < 0$, tilanne on oleellisesti sama kuin äsken.

Huom. Tässä oli oikeastaan kyse siitä, että ns. Lipschitz-ehdosta ei seuraa derivoituvuus. Jatkuvuus siitä kyllä seuraa, koska kutakin $\varepsilon > 0$ kohti voitaisiin valita $\delta = \varepsilon/C$.

(c) Oletetaan, että $x \neq t$. Oletuksen mukaan kaikilla $x, t \in [a, b]$ pätee $|f(x) - f(t)| \leq C|x - t| \sqrt[42]{|x - t|}$, joten koska $x \neq t$

$$\begin{aligned} &\frac{|f(x) - f(t)|}{|x - t|} \leq C \sqrt[42]{|x - t|} \\ \Rightarrow \quad &\left| \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \right| \leq C \sqrt[42]{|x - t|}. \end{aligned}$$

Funktio f on vakiofunktio välillä $[a, b]$, jos $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. Näytetään siis, että erotusosamäärän raja-arvo on 0 jokaisessa pisteessä $x \in [a, b]$. Huomataan, että

$$C \sqrt[42]{|x - t|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x - t| < \left(\frac{\varepsilon}{C} \right)^{42}.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = (\varepsilon/C)^{42}$. Oletetaan, että $0 < |x - t| < \delta$. Nyt

$$\left| \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \right| \leq C \sqrt[42]{|x - t|} < C \sqrt[42]{\left(\frac{\varepsilon}{C} \right)^{42}} = \varepsilon,$$

joten funktio f on derivoituva jokaisessa pisteessä $t \in [a, b]$ ja $f'(t) = 0$. Siis funktio f on on vakiofunktio.

Huom. Oleellista eksponentissa $43/42$ näytti olevan se, että $43/42 > 1$.