MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex tempore tehtävät ja kotitehtävät 5
10.10.2011 alkavalle viikolle

Tällä viikolla harjoitellaan lukujonojen rajatta kasvamista ja aletaan ihmetellä funktion raja-arvon käsitettä.

EX TEMPORE TEHTÄVÄT

E1. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0.$$

E2. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 - n) = \infty.$$

E3. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = \infty.$$

E4. Määritellään $x_1 = 2$ ja $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}$. Suppeneeko jono?

E5. Osoita, että

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x-1} = 3.$$

E6. Määritellään $f(x) = x^2 + 3x$. Osoita, että

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 10.$$

E7. Määritellään $f(x) = x^2 + 3x$. Osoita, että

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 7.$$

Osaatko tulkita tuloksen derivaattana?

E8. Oletetaan, että $x_n \to \infty$ ja $y_n \to a \in \mathbb{R}$, kun $n \to \infty$. Osoita, että $x_n + y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$.

KOTITEHTÄVÄT

K1. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty}(2n+3) = \infty.$$

K2. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$. Voidaanko tulos tulkita tietona erään funktion jatkuvuudesta? Minkä ja missä kohdassa?

K3. Osoita, että $5^n \geq 1 + 4n$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$.

K4. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{3n+4} = \infty.$$

K5. Selvitä luvun e määritelmän avulla

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{7n})^n.$$

Tehävässä saa käyttää tietoa: jos $x_n \to a$ kun $n \to \infty$, niin $\sqrt[7]{x_n} \to \sqrt[7]{a}$.

K6. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}.$$

Voidaanko tulos tulkita tietyn funktion dervoituvuutena? Minkä ja missä kohdassa?

K7. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty.$$

K8. Oletetaan, että $x_n \to \infty$ ja $y_n \to a \in \mathbb{R}$, kun $n \to \infty$.

(a) Oletetaan, että $a > 0$. Osoita, että $x_n y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. Vihje: $y_n > \frac{a}{2}$ kun n on kyllin suuri. (Tulos ilmaistaan usein sääntönä $a\infty = \infty$, kun $a > 0$.)

(b) Oletetaan, että $a < 0$.Osoita, että $x_n y_n \to -\infty$ kun $n \to \infty$. Tulos ilmaistaan usein sääntönä $a\infty = -\infty$, kun $a < 0$

(c) Onko sääntöä $0\infty = \ldots$?