

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Ex tempore tehtävät ja kotitehtävät 9

14.11.2011 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa käsitellään funktion jatkuvuuteen liittyviä kysymyksiä.

EX TEMPORE TEHTÄVÄT

E1. Osoita määritelmien perusteella, että

$$6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x \rightarrow \infty.$$

kun $x \rightarrow \infty$ ja kun $x \rightarrow -\infty$.

E2. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että yhtälöllä

$$6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x = 2009$$

on ainakin yksi positiivinen ratkaisu.

E3. Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x$$

saa on pienin arvo.

E4. Määritellään funktio $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$. Onko se aidosti kasvava? Entä jatkuva? Onko funktiolla f käänteisfunktio?

KOTITEHTÄVÄT

K1. Osoita, että

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$$

on jatkuva koko \mathbb{R} :ssä.

K2. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = x^{77} + x^{33} + 22$. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että on olemassa $x \in]0, 1[$, jolle pätee $f(x) = 23$.

K3. Tarkastellaan edellisen tehtävän funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Osoita, että $f(x) \rightarrow -\infty$ kun $x \rightarrow -\infty$ ja $f(x) \rightarrow \infty$ kun $x \rightarrow \infty$. Osoita näiden havaintojen avulla, että on olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 777$.

K4. Olkoon f tehtävän 2 funktio. Määritellään

$$g(x) = \sqrt{f(x)^2 + 1}.$$

Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita funktio g saa on pienin arvo. Toisin sanoen osoita, että on olemassa $a \in \mathbb{R}$, jolle kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $g(x) \geq g(a)$.

K5. Oletetaan, että funktio $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $]0, \infty[$. Merkitään $g(x) = f(x^2 + 1)$. Onko näin määritelty funktio g jatkuva koko joukossa \mathbb{R} ?

K6. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x + x^3$ määritellyllä funktiolla $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on käänteisfunktio $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

K7. Tarkastellaan tehtävän 2 lausekkeella määriteltyä funktiota $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Osoita, että sillä on aidosti kasvava ja jatkuva käänteisfunktio.

K8. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva. Oletetaan, että $f(1) < f(3)$ ja $f(2) > f(4)$. Osoita, että on olemassa kaksi eri reaalilukua x ja y , joilla $f(x) = f(y)$. (Tämä tehtävä on erikoistapaus todistuksesta tulokselle, jonka mukaan jatkuva injektio $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on välttämättä aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.)