

Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 11, 9.5.2011

Huom. Poikkeuksellinen aika ma 9.5. klo 14-16 (sali B322)

1. Olkoot jälleenvakuutusmarkkinat kuten lauseessa 9.2.3 ja $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_K)$ sallittu allokointi. Osoita, että jos on olemassa positiiviset vakiot h_1, \dots, h_K ja positiivinen satunnaismuuttuja f siten, että

$$u'_k(U_k - \bar{X}_k) = h_k f$$

melkein varmasti kaikilla $k = 1, \dots, K$, niin $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_K)$ on Pareto-optimaalinen allokointi.

2. Olkoon $(\bar{\phi}, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_K)$ jälleenvakuutusmarkkinoiden tasapainotila ja

$$\mathbb{E}(\bar{\phi} \bar{X}_k) = \mathbb{E}(\bar{\phi} X_k), \quad k = 1, \dots, K.$$

Osoita, että $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_K)$ on Pareto-optimaalinen allokointi.

3. Tarkastellaan esimerkin 9.2.15 mukaista tasapainotilaa jälleenvakuutusmarkkinoilla. Olkoon $X = X_1 + \dots + X_K$ markkinoiden vastuulla oleva kokonaiskorvausmäärä ja Y mielivaltainen positiivinen satunnaismuuttuja, jolla on äärellinen varianssi. Olkoot

$$R = \frac{Y}{\mathbb{E}(\bar{\phi} Y)} - 1 \text{ ja } R^* = \frac{X}{\mathbb{E}(\bar{\phi} X)} - 1$$

satunnaismuuttujien Y ja X tuottoasteet. Osoita, että

$$\mathbb{E}(R) = \frac{\text{Cov}(R, R^*)}{\text{Var}(R^*)} \mathbb{E}(R^*).$$

4. Olkoot jälleenvakuutusmarkkinoiden toimijoiden utiliteettifunktiot u_k muotoa

$$u_k(z) = \mu_k^{-1}(1 - e^{-\mu_k z}), \quad z \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, K,$$

missä μ_1, \dots, μ_K ovat positiivisia vakioita. Merkitään $\mu = (\sum_{k=1}^K \mu_k^{-1})^{-1}$. Alkuperäiset kokonaisvahinkomäärät X_1, \dots, X_K ovat rajoitettuja satunnaismuuttujia. Oletetaan, että markkinat ovat tasapainotilassa. Määrää markkinoiden hinnoittelija.

5. (jatkoa) Esscherin tariffiperiaatteessa kokonaisvahinkomäärää Y vastaava vakuutusmaksu $\pi(Y)$ on

$$\pi(Y) = \mathbb{E}(Y e^{aY - c_Y(a)}),$$

missä a on positiivinen vakio ja c_Y kumulanttifunktion generoiva funktio,

$$c_Y(t) = \log \mathbb{E}(e^{tY}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että jos alkuperäiset kokonaisvahinkomäärät X_1, \dots, X_K ovat riippumattomia, niin niiden tasapainohinnat ovat Esscherin tariffiperiaatteen mukaisia ja $a = \mu$.