

Stationaariset aikasarjat sl 2010 - kl 2011, HT 2, viikko 46

1. Tarkastellaan prosessia $y_t = x_t + w_t$, jossa $w_t \sim \text{iid}(0, \tau^2)$ ja x_t on AR(1)-prosessi $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, $|\phi| < 1$. Oletetaan lisäksi, että $w_t \perp \varepsilon_s$ kaikilla t, s . Osoita, että y_t on heikosti stationaarinen ja johda sen autokovarianssifunktio.

2. Tarkastellaan ei-kausaalista AR(1)-prosessia $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, jossa $|\phi| > 1$. Johda prosessin y_t autokovarianssifunktio.

Vihje: Voit käyttää monisteen s. 15 on todettua tulosta, jonka mukaan y_t :llä on lineaarinen esitys on $y_t = -\sum_{j=0}^{\infty} \phi^{-j-1} \varepsilon_{t+1+j}$, ja monisteen s. 12 johdettua yleisen lineaarisen prosessin autokovarianssifunktion lauseketta.

3. Jatkoa edelliseen. Määritellään prosessi $z_t = \phi_* z_{t-1} + \eta_t$, $\eta_t \sim \text{wn}(0, \sigma_*^2)$, jossa $\phi_* = 1/\phi$, $\sigma_*^2 = \sigma^2/\phi^2$ ja parametrien ϕ ja σ^2 arvojen oletetaan olevan samat kuin edellisessä tehtävässä. Osoita, että prosesseilla y_t ja z_t on sama autokovarianssifunktio ja autokorrelaatiofunktio.

Huom.: Tehtävistä 2 ja 3 seuraa, ettei havaitusta aikasarjasta y_1, \dots, y_T estimoidun autokovarianssi- tai autokorrelaatiofunktion avulla voida päätellä onko havainnot tuottanut AR(1)-prosessi kausaalinen vai ei-kausaalinen. Koska normaalin prosessin tapauksessa havaitun aikasarjan y_1, \dots, y_T (T -ulotteinen ja normaalin) todennäköisyysjakauma määräytyy odotusarvosta $E(y_t)$ (tässä tapauksessa nolla) ja kovarianssifunktiosta, ei aineisto sisällä lainkaan informaatiota siitä onko taustalla oleva prosessi kausaalinen vai ei-kausaalinen.

4. Tarkastellaan stationaarista ARMA(1,1)-prosessia $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, $|\phi| < 1$. Esitä y_t :n MA(∞)-esityksen suotimen $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = (1 + \theta B) / (1 - \phi B)$ kertoimet ψ_j parametrien ϕ ja θ funktioina. Mitä tapahtuu kertoimille ψ_j ja prosessin y_t autokovarianssifunktiolle, kun $\phi = -\theta$?