

Stationaariset aikasarjat sl 2010 - kl 2011, HT 1, viikko 45

1. Tarkastellaan monisteen Esimerkin 2.1(ii) prosessia

$$y_t = A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t),$$

jossa $\lambda \in [0, \pi)$ on vakio ja satunnaismuuttujat A ja B toteuttavat ehdot $E(A) = E(B) = 0$, $\text{Var}(A) = \text{Var}(B) = \sigma^2$ ja $\text{Cov}(A, B) = 0$. Osoita, että $E(y_t) = 0$ ja $\text{Cov}(y_t, y_{t+h}) = \sigma^2 \cos(\lambda h)$, joten y_t on heikosti stationaarinen.

Vihje: $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

2. Olkoon $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1)$. Määritellään prosessi

$$y_t = \begin{cases} \varepsilon_t, & \text{kun } t \text{ on parillinen} \\ (\varepsilon_t^2 - 1)/\sqrt{2}, & \text{kun } t \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Osoita, että $y_t \sim \text{wn}(0, 1)$, mutta $y_t \sim \text{iid}(0, 1)$ ei päde.

Vihje: $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1) \Rightarrow E(\varepsilon_t^4) = 3$ tai $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1) \Rightarrow \varepsilon_t^2 \sim \chi_1^2$ ja $\text{Var}(\varepsilon_t^2) = 2$.

3. Tarkastellaan monisteen Esimerkin 2.2(ii) prosessia $y_t = \varepsilon_t \sqrt{\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2}$, jossa $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ ja $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$. Osoita, että y_t on heikko valkoinen kohina.

4. Tarkastellaan MA(1)-prosessin $y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, ensimmäistä autokorrelaatiokerrointa $\rho_1 = \theta / (1 + \theta^2)$ (ks. monisteen s. 10). Osoita, että

$$-1/2 \leq \rho_1 \leq 1/2$$

ja että $\rho_1 = 1/2$ (vastaavasti $\rho_1 = -1/2$), kun $\theta = 1$ (vastaavasti $\theta = -1$).