

Johdatus tilastolliseen päättelyyn Harjoitus 2 (28. 3.–1. 4. 2011)

1. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat X_1, \dots, X_n ovat riippumattomia ja noudattavat kukin $\text{Exp}(\lambda)$ -jakaumaa, jossa parametri on $\lambda > 0$. Muodosta näin syntyvän tilastollisen mallin lauseke eli yhteistiheysfunktio $f(\mathbf{x}; \lambda)$, jossa aineisto on $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $x_i > 0$ jokaisella i .
2. (Jatkoa edelliseen tehtävään.) Muodosta uskottavuusfunktio ja johda parametrin λ su-estimaatti $\hat{\lambda}$ tutkimalla uskottavuusfunktion logaritmia.
3. Palataan edellisten harjoitusten tehtävissä 1 ja 2 tarkasteltuun malliin $f(x; \theta)$, jossa siis aineisto koostuu yhdestä havainnosta x ja pistetodennäköisyydet olivat seuraavat:

x	1	2	3	4	5
$f(x; 1)$	0	0.3	0.5	0.1	0.1
$f(x; 2)$	0.1	0.4	0.3	0.2	0

Esitä havaintoa x vastaava uskottavuusfunktio $L(\theta; x)$ graafisesti ja määritä suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\theta}$, kun i) $x = 1$ ja ii) $x = 3$.

4. (Jatkoa edelliseen tehtävään.) Yhden havainnon sijasta tehdäänkin ko. jakaumasta kaksi riippumatonta havaintoa, satunnaismuuttujina $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$. Laske nyt uskottavuusfunktion $L(\theta; x_1, x_2)$ arvot ja esitä se graafisesti, kun havainnot ovat $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Mikä on su-estimaatti $\hat{\theta}$? Miten kommentoisit estimointiin liittyvää epävarmuutta?
5. Tarkastellaan toistokoemallia $T \sim \text{Bin}(n, \theta)$, jossa havaitaan T :n arvo t ja parametri on $0 \leq \theta \leq 1$. Luennolla on näytetty, että su-estimaatti on $\hat{\theta} = t/n$. Tutkitaan tätä vastaavaa satunnaismuuttujaa eli *estimaattoria* $\hat{\theta} = T/n$ (merkiten sitä siis samalla symbolilla kuin estimaattia).
 - a) Totea, että $\hat{\theta}$ on *harhaton* eli $E(\hat{\theta}) = \theta$. Mitä tämä voisi tulkinnallisesti merkitä ”toistetun aineistonkeruun” ajatuksen kannalta?
 - b) Laske varianssi $\text{var}(\hat{\theta})$ ja totea, että se $\rightarrow 0$, kun toistojen lukumäärä $n \rightarrow \infty$. Mitä tämä tulos merkitsee?