

# Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoituskokoelmat 4 ja 5, kevät 2011

Palautus Eemeli Blåstenille to 23.6. klo 16.00 mennessä

1. Ratkaise Dirichlet-ongelma

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 < 1,$$

$$u(x, y) = y + x^2, \quad \text{kun } x^2 + y^2 = 1.$$

2. Todista, että jokainen origokeskisessä  $a$ -säteisessä kiekossa harmoninen, ei-negatiivinen funktio  $u$  toteuttaa ns. Harnackin-epäyhtälön

$$\frac{a-r}{a+r}u(0,0) \leq u(x,y) \leq \frac{a+r}{a-r}u(0,0), \quad 0 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < a.$$

3. Etsi joukossa  $\{(x, y); x^2 + y^2 > 4\}$  harmoninen funktio  $u$ , jolle

$$u(x, y) = y, \quad \text{kun } x^2 + y^2 = 4,$$

ja

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} u(x, y) = 0.$$

4. Määrää Cauchy-ongelman

$$u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = 1 + |x|^2/2,$$

radiaalinen ratkaisu.

5. Määrää Cauchy-ongelman

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = ae^{-|x|^2}, \quad u_t(x, 0) = be^{-|x|^2},$$

radiaalinen ratkaisu.

6. Oletetaan, että  $C^1$ -vektorifunktiot  $E(x, t)$  ja  $B(x, t)$  ( $x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ ) toteuttavat *Maxwell-yhtälöt*

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = \nabla \times B(x, t),$$

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} = -\nabla \times E(x, t),$$

$$\nabla_x \cdot E(x, t) = \nabla_x \cdot B(x, t) = 0.$$

Osoita, että  $E$ :n ja  $B$ :n jokainen komponenttifunktio toteuttaa aaltoyhtälön

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0.$$

**Vihje:** Käytä identiteettiä  $(\nabla \times)^2 = \nabla \nabla \cdot - \Delta$ .

7. Oletetaan, että  $u$  toteuttaa Cauchy-ongelman

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

missä  $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Osoita, että on olemassa vakio  $C$  siten että

$$|u(x, t)| \leq C/t, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0.$$

Todista myös vastaava estimaatti tason tapauksessa.

8. Tarkastellaan Cauchy-ongelmaa yksiulotteiselle aaltoyhtälölle

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Oletaan, että  $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  on tämän ratkaisu, ja  $f$ :llä ja  $g$ :llä on kompaktit kantajat. Määritellään *kineettinen energia* kaavalla

$$k(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) \, dx,$$

ja *potentiaalienergia* kaavalla

$$p(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x, t) \, dx.$$

Osoita, että (a)  $k(t) + p(t)$  on vakio, ja että (b) riittävän suurilla  $t$  pätee  $k(t) = p(t)$ . **Vihje:** Osa tehtävistä löytyy luentojen alkupuolelta.

9. Todista harmonisten funktioiden keskiarvoperiaate  $\mathbb{R}^3$ :ssa käyttäen Euler-Poisson-Darboux-yhtälöä. **Huom.** Tämän voi toki helpommin osoittaa suoraan, mutta tarkoitus on tässä osoittaa, että harmonisia funktioita voi myös käsitellä ajasta riippumattomina aaltoyhtälön ratkaisuina.

10. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = x + t, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x_2 + x_2, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

11. Tarkastellaan Cauchy-ongelmaa *lennätinyhtälölle*,

$$w_{tt} = c^2 w_{xx} - c^2 \lambda^2 w, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että

$$w(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} J_0(\lambda s) f(y) ds,$$

missä  $s^2 = c^2 t^2 - (x - y)^2$ , ja

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z \sin \theta) d\theta$$

on (kertaluvun nolla) Bessel-funktio. **Vihje:** Osoita, että funktio

$$u(x, y, t) = \cos(\lambda y) w(x, t)$$

toteuttaa kaksiulotteisen aaltoyhtälön. Määrä  $u$  käyttäen luennoilla annettua kaavaa.

12. Olkoon  $S$  avaruuden  $\mathbb{R}^{3+1}$  pinta, jolla on parametriesitys

$$S : \{(x, t); t = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^3\},$$

missä  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Olkoot  $f, g \in C^\infty(S)$  ja  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ . Oletetaan, että pinta  $S$  on *ei-karakteristinen*, eli että

$$1 - c^2 |\nabla \varphi(x)|^2 \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Osoita, että on olemassa  $C^\infty$ -funktiot  $a_i, i = 0, \dots, 4$ , siten että funktio

$$v(x, t) = \sum_{i=0}^4 a_i(x) (t - \varphi(x))^i$$

toteuttaa

$$v|_S = f, v_t|_S = g, (\square v - w)|_S = 0,$$

missä

$$\square = \partial_{tt} - c^2 \Delta$$

on *aalto-operaattori*.

13. Jatkoa edelliseen tehtävään. Tarkastellaan nyt Cauchy-ongelmaa alkuarvopintana  $S$ :

$$\square u = w, t > \varphi(x), \quad (0.1)$$

$$u|_S = f, u_t|_S = g. \quad (0.2)$$

Olkoon  $v$  edellisessä tehtävässä konstruoitu funktio, ja määritellään  $W(x, t) = w(x, t) - \square v(x, t)$ . Osoita, että funktio

$$W^*(x, t) = \begin{cases} W(x, t), & t \geq \varphi(x) \\ 0, & t < \varphi(x) \end{cases}$$

kuuluu avaruuteen  $C^2(\mathbb{R}^n)$ , ja että  $U = u - v$  toteuttaa Cauchy-ongelman

$$\square U = W^*, t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \quad (0.3)$$

$$U(x, 0) = U_t(x, 0) = 0, x \in \mathbb{R}^3. \quad (0.4)$$

14. Olkoon  $U$  ongelman (0.3)-(0.4) ratkaisu. Oletetaan, että alkuarvopinta  $S$  on *paikankaltainen*, eli

$$1 - c^2 |\nabla \varphi(x)|^2 > 0.$$

Osoita, että  $u = U + v$  toteuttaa Cauchy-ongelman (0.1)-(0.2). **Vihje:** Riittää osoittaa, että  $U = 0$  kun  $t < \phi(x)$ . Osoita, että  $W^*(y, s)$  häviää  $(x, t)$ -kärkisessä menneisyyteen osoittavassa valokartiossa, ja käytä Duhamelin periaatetta yhdessä paikankaltaisuusehdon kanssa.

15. Laske välin  $[-a, a]$ ,  $a > 0$ , karakteristisen funktion Fourier-muunnos

16. Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Fourier-muunnos.

17. Olkoon  $A$  reallikertoiminen positiividefiniitti symmetrinen  $n \times n$  matriisi. Laske funktion  $f(x) = e^{-\langle Ax, x \rangle}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , Fourier-muunnos.
18. Olkoon  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , ja oletetaan että  $\hat{f}$  on jatkuva ja toteuttaa

$$\hat{f}(\xi) = O(|\xi|^{-1-\alpha})$$

kun  $|\xi| \rightarrow \infty$  jollain  $0 < \alpha < 1$ . Osoita, että  $f$  on Hölder jatkuva kertalukua  $\alpha$ , eli että on olemassa vakio  $M$  siten että

$$|f(x+h) - f(x)| \leq Mh^\alpha$$

kaikilla  $x, h \in \mathbb{R}$ .

**Hint:** Lausu erotus  $f(x+h) - f(x)$  käänteismuunnoskaavaa käyttäen integraalina  $\hat{f}$ :sta, ja arvioi tätä erikseen joukoissa  $|\xi| \leq 1/|h|$  ja  $|\xi| \geq 1/|h|$ .

19. Muotoile ja todista Duhamelin periaate lämpöyhtälölle.
20. Johda kaava alkuarvo-ongelman

$$u_t - \Delta u + cu = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$u|_{t=0} = g,$$

ratkaisulle. Tässä  $c$  on positiivinen vakio.