

Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssin harjoitus 1, 7.2.2011

1. Olkoon yhtiön alkupääoma $U_0 > 0$. Vakuutuksia on yksi kappale, jonka perusteella maksetaan hetkellä j summa S_j , mikäli vakuutettu kuolee välillä $[j-1, j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Summa S_j on erään osakkeen arvo korvaushetkellä. Oletetaan, että $\mathbb{P}(S_j > 0) = 1$, kaikilla $j = 0, 1, 2, \dots, n$, ja että S_0 on deterministinen. Vakuutus on loppuunmaksettu eikä uusia vakuutuksia myönnetä. Vakuutettu on hetkellä nolla x -ikäinen. Olkoon T jäljellä oleva elinaika. Elossa olevan vastuuvélaksi hetkellä $j < n$ katsotaan määrä ${}_{n-j}q_{x+j}S_j$. Yhtiö sijoittaa aina kaiken varallisuutensa mainittuun osakkeeseen.

Olkoon U_j yhtiön hallussa oleva varallisuus hetkellä $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ (heti mahdollisen hetkellä j maksettavaksi tulevan kuolintapauskorvauksen jälkeen). Osoita, että

$$U_j = \frac{S_j}{S_0}U_0 - S_j\mathbf{1}(T < j).$$

2. (jatkoa) Olkoon $V(j)$ vastuuvélka hetkellä j ja τ vararikkohetki,

$$\tau = \begin{cases} \inf\{j \in [0, n] \mid U_j < V(j)\} \\ \infty, \text{ jos } U_j \geq V(j), \forall j \in [0, n]. \end{cases}$$

Olkoon

$$Y_j = S_0[\mathbf{1}(T < j) + {}_{n-j}q_{x+j}\mathbf{1}(T \geq j)], \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Osoita, että,

$$\tau = \begin{cases} \inf\{j \in [0, n] \mid Y_j > U_0\} \\ \infty, \text{ jos } Y_j \leq U_0, \forall j \in [0, n]. \end{cases}$$

3. (jatkoa) Merkitään $\psi(U_0) = \mathbb{P}(\tau < \infty)$. Määrää $\psi(U_0)$, kun

a) $U_0 \geq S_0$

b) $U_0 < {}_nq_x S_0$.

4. (jatkoa) Olkoon $U_0 \in ({}_nq_x S_0, S_0)$. Määrää $\psi(U_0)$.

5. (jatkoa) Määrää paras henkivakuutusmatematiikan kurssin lauseen 10.2 antama yläraja vararikkotodennäköisyydelle $\psi(U_0)$, kun $\phi(x) = x^\alpha \mathbf{1}(x \geq 0)$ ja $\alpha \geq 1$.