

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Harjoitus 7

21. 3. 2011 alkavalle viikolle

Ohjauksiin osallistumisesta on luvassa lisäpisteitä: jos osallistuu 21.3. alkaen 4-5 ohjaukseen, niin saa 2 lisäpistettä ja osallistumalla 3 ohjaukseen saa yhden lisäpisteen.

1. Suppeneeko vai hajaantuuko (a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right)^k$ ;

(b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2k}\right)^k$ .

2. Suppeneeko vai hajaantuuko  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7+6k^4-5}{k^9+5k^3-3}$ .

3. Suppeneeko vai hajaantuuko  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ .

4. Suppeneeko vai hajaantuuko  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ .

5. Suppeneeko vai hajaantuuko  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

6\* Oletetaan, että  $f : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva ja että  $f(x) \geq 0$  kaikilla  $x \geq 1$ .

(a) Oletetaan, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} f$$

suppenee. Osoita, että epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} f$$

suppenee.

(b) Oletetaan, että  $f : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva ja että  $f(x) \geq 0$  kaikilla  $x \geq 1$ .

Oletetaan lisäksi, että integraali  $\int_1^{\infty} f$  suppenee.

(i) Päteekö välttämättä  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ?

(ii) Onko funktio  $f$  välttämättä rajoitettu?

Kannattaa tarkastella esimerkiksi funktiota  $f : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , jolle kaikilla  $k = 1, 2, \dots$  pätee  $f(x) = k - 2k^4|x - (k + \frac{1}{2})|$  kun  $k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^3} \leq x \leq k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2k^3}$ , ja  $f(x) = 0$  muuten. (Hahmottele kuvaajaa!)